

การพัฒนาโปรแกรมหาคำตอบเชิงตัวเลข สำหรับสมการการเคลื่อนที่แบบไม่เป็นเชิงเส้นของแนววิถีจรวดประดิษฐ์

ชนะ รัชศิริ¹ เจษฎากร จันทวงษ์^{1*} และ กฤติยา พาอิม¹

วันที่รับ 9 พฤศจิกายน 2565 วันที่แก้ไข 20 กุมภาพันธ์ 2566 วันตอบรับ 28 กุมภาพันธ์ 2566

บทคัดย่อ

เมื่อจรวดประดิษฐ์เคลื่อนที่ออกจากจุดปล่อยจรวดประดิษฐ์จะผ่านตัวกลางซึ่งเป็นอากาศไปยังพื้นที่เป้าหมายตามแนวการเคลื่อนที่ที่ได้ออกแบบไว้ แต่เนื่องจากมีปัจจัยต่าง ๆ ส่งผลให้การเคลื่อนที่ของแนววิถีจรวดประดิษฐ์เบี่ยงเบนไปจากทิศทางปกติที่ออกแบบไว้และมีลักษณะของสมการเป็นแบบไม่เป็นเชิงเส้น จึงมีความจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องทำการศึกษา ออกแบบ และแก้ปัญหาการเคลื่อนที่แบบไม่เป็นเชิงเส้นนี้ เพื่อลดความผิดพลาดที่อาจเกิดขึ้น และเพิ่มประสิทธิภาพของความแม่นยำของการปล่อยต่อไป การแก้ปัญหาสมการการเคลื่อนที่แบบไม่เป็นเชิงเส้นสามารถทำได้หลายวิธี โดยในบทความนี้นำเสนอวิธีการหาผลเฉลยของสมการด้วยวิธีการของรุงเง-คุตตาอันดับที่ 4 โดยใช้สมการการเคลื่อนที่ของแนววิถีจรวดประดิษฐ์อ้างอิงจากแบบจำลองของ Modified Point Mass Trajectory Model ซึ่งได้จำลองเปลี่ยนสถานะเริ่มต้นเป็นจำนวน 21 รูปแบบ ผลการจำลองแสดงให้เห็นว่าแนววิถีจรวดประดิษฐ์ที่มีมุมยกและสถานะเริ่มต้นที่แตกต่างกัน โดยที่เมื่อมีมุมยกและสถานะเริ่มต้นที่มากขึ้นจะส่งผลให้ระยะทางในแนวตั้งฉากกับระนาบการบินนั้นสูงขึ้นอย่างมีนัยสำคัญ นอกจากนี้จะส่งผลให้ตำแหน่งของจรวดประดิษฐ์ ณ เวลาใด ๆ มีค่าที่แตกต่างกันอย่างเห็นได้ชัดเมื่อเวลาการบินเพิ่มขึ้น

คำสำคัญ : สมการวิถีจรวดประดิษฐ์, การเคลื่อนที่แบบไม่เชิงเส้น, ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา

¹ ภาควิชาวิศวกรรมอุตสาหการ, คณะวิศวกรรมศาสตร์, มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

* ผู้แต่ง, อีเมล: chessadakorn.c@ku.th

A Development of Numerical Solution for Non-Linear Inventor Rocket Equation of Motion

Chana Raksiri¹ Chessadakorn Chantawong^{1*} Krittiya Pa-im¹

Received 9 November 2022, Revised 20 February 2023, Accepted 28 February 2023

Abstract

When an inventor rocket moves away from the launch point, the inventor rocket passes through the medium, which is air, to the target area along the designed line of motion. But because there are factors. As a result, the movement of the inventor rocket trajectory deviates from the normal direction it was designed for and the nature of the equation is nonlinear. Therefore, it is essential to study, design and solve this nonlinear motion problem in order to reduce possible faults and further increase the efficiency of emission accuracy. Solving the nonlinear motion equations can be done in a variety of ways, with this paper presenting the method of finding the deuteronomy of the equations with the methods of Runge-Kutta 4th, using the inventor rocket trajectory equation based on the Modified Point Mass Trajectory Model, which experimented with transforming the initial state into 21 patterns. The simulation results showed inventor rocket trajectories with different lift angles and initial conditions. Whereas with a greater lift angle and starting conditions, the distance perpendicular to the flight plane is significantly higher. In addition to that, it will result in the position of the inventor rocket at any given time. There are markedly different values as flight time increases.

Keywords : Rocket equation of motion, Nonlinear motion, Runge-kutta methods

¹ Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering, Kasetsart University.

* Corresponding author, E-mail: chessadakorn.c@ku.ac.th

1. บทนำ

วิถีของจรวดประดิษฐ์ (Inventor Rocket Trajectory) คือการศึกษาการเคลื่อนที่ของจรวดประดิษฐ์ โดยเริ่มต้นตั้งแต่เมื่อจรวดประดิษฐ์เริ่มเกิดแรงผลัก (Thrust Force) และเคลื่อนที่ไปในตัวกลางอากาศ และตกยังพื้นที่เป้าหมาย โดยที่ความแม่นยำและอำนาจการปล่อยของจรวดประดิษฐ์นั้น จะขึ้นอยู่กับความแม่นยำของการศึกษาและออกแบบการเคลื่อนที่ของจรวดประดิษฐ์ในทุกๆ ระยะ [1]

เมื่อจรวดประดิษฐ์ซึ่งมีมวลและแรงผลักเริ่มต้นซึ่งทำให้จรวดประดิษฐ์เริ่มเคลื่อนที่ออกจากจุดปล่อยจรวดประดิษฐ์ด้วยความเร็วต้น (Initial Velocity) จรวดประดิษฐ์จะหมุน (Spinning) รอบแนวการเคลื่อนที่ของจรวดประดิษฐ์ (Longitudinal Axis) ด้วยความเร็วเชิงมุม (Spinning rate) ผ่านตัวกลาง (Medium) ซึ่งเป็นอากาศไปยังพื้นที่เป้าหมายตามแนวการเคลื่อนที่ที่ได้ออกแบบไว้ (Desired trajectory) แต่เนื่องจากปัจจัยจากแรงผลักของจรวดประดิษฐ์แรงโน้มถ่วงของโลก ความหนาแน่นของอากาศ ปัจจัยจากธรรมชาติอื่น ๆ เช่น ลม อุณหภูมิ และฝน ซึ่งสิ่งต่างๆ เหล่านี้ส่งผลให้เกิดแรงต้านการเคลื่อนที่ของจรวดประดิษฐ์ อันได้แก่ แรงต้านอากาศ (Drag force) แรงยกตัว (Lift force) แรงโคริออริส (Coriolis force) แรงแมกนัส (Magnus force) และแรงโน้มถ่วงของโลก (Gravity force) ซึ่งแรงต่างๆ ที่ไม่พึงประสงค์เหล่านี้ส่งผลให้การเคลื่อนที่ของแนววิถีของจรวดประดิษฐ์เบี่ยงเบนไปจากทิศทางปกติที่ออกแบบไว้ และมีลักษณะของสมการเป็นแบบไม่เป็นเชิงเส้น จึงมีความจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องทำการศึกษา ออกแบบ และแก้ปัญหาการเคลื่อนที่แบบไม่เป็นเชิงเส้นนี้ให้ดีกว่าก่อนที่จะทำการพัฒนาขึ้นมาใช้งานจริง เพื่อลดความผิดพลาดที่อาจจะเกิดขึ้น และเพิ่มประสิทธิภาพของความแม่นยำในการปล่อยจรวดประดิษฐ์ต่อไป

การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์การเคลื่อนที่แบบไม่เป็นเชิงเส้นโดยใช้วิธีหาค่าผลเฉลยทางตรงนั้น มีความซับซ้อนค่อนข้างสูง ซึ่งปัจจุบันนิยมใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical Method) เพื่อลดเวลาและเพิ่มความสะดวกในทางปฏิบัติ การหาค่าผลเฉลยสามารถทำได้หลายวิธี [2] เช่น ประยุกต์โดยใช้กฎของนิวตันมาสร้างสมการการเคลื่อนที่ของแนววิถีจรวดประดิษฐ์ทั้งในกรณีที่มีและไม่มีผลกระทบจากความเร็วลม แล้วใช้ระเบียบวิธีของออยเลอร์ (Euler's method) หาค่าความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางและทิศทางของการปล่อยกับแนวการเคลื่อนที่ของจรวดประดิษฐ์ ระเบียบวิธีของออยเลอร์ถือเป็นวิธีที่ไม่ซับซ้อน แต่เนื่องจากวิธีนี้ให้ความถูกต้องของผลเฉลยไม่สูงมาก [3] จึงได้มีการปรับปรุงระเบียบวิธีของออยเลอร์ (Improved Euler's method) ขึ้นมาเพื่อช่วยลดความผิดพลาดของผลเฉลยนี้ นอกจากนี้ยังมีระเบียบวิธีเชิงตัวเลขอื่น ๆ ที่มีประสิทธิภาพมากขึ้น เช่น วิธีของรุ่งเง-คุดตา (Runge-Kutta: RK) และการปรับปรุงระเบียบวิธีอื่น ๆ โดยใช้พื้นฐานของรุ่งเง-คุดตา เพื่อให้ผลเฉลยมีความถูกต้องแม่นยำเพิ่มขึ้น

ระเบียบวิธีของรุ่งเง-คุดตาเป็นเทคนิคการประมาณค่าตอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่ได้รับความนิยมอย่างมากในงานวิจัยเชิงคณิตศาสตร์ในปัจจุบัน [4] เนื่องจากเป็นวิธีที่เหนือกว่าวิธีอื่นเมื่อพิจารณาในเรื่องความถูกต้องแม่นยำในทุกๆ ระยะการคำนวณภายใต้ความกว้างช่วงคำนวณ (Step size) เดียวกัน [5] ซึ่งมีประสิทธิภาพและมีความสะดวกในการประยุกต์ใช้ โดยเฉพาะมีความง่ายในการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อคำนวณหาค่าผลเฉลย วิธีการนี้ได้ถูกปรับปรุงขึ้นมาในหลากหลายแบบ

สมการรุ่งเง-คุดตาอันดับ 1 (RK1) มีลักษณะคล้ายกับสมการในระเบียบวิธีของออยเลอร์ โดยในวิธีนี้ค่าของผลเฉลยของเวลาถัดไปจะขึ้นอยู่กับ

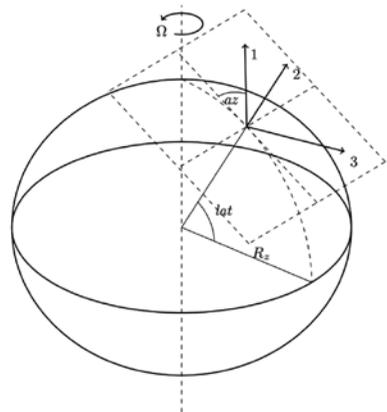
ผลรวมของค่าของผลเฉลย ณ ปัจจุบันกับความชันของช่วงเวลาปัจจุบัน (k_1) ทำให้ผลเฉลยของวิธีนี้ไม่เสถียรและไม่ถูกต้องแม่นยำเท่าที่ควร [6] RK2 เป็นสมการที่ปรับปรุงขึ้นมาจากวิธีของออยเลอร์ โดยได้เพิ่มพจน์ของความชัน (k_2) ณ ตำแหน่งตรงกลางของผลเฉลยในปัจจุบันกับ k_1 เข้าไปด้วย ทำให้ผลเฉลยมีความถูกต้องแม่นยำดีขึ้นจากเดิม RK3 [7] ได้เพิ่มพจน์ของความชัน (k_3) เพื่อเพิ่มความถูกต้องแม่นยำ ส่วน RK4 นั้นจะถูกนำมาใช้ค่อนข้างมากในทางปฏิบัติ สามารถคำนวณหาผลเฉลยโดยคอมพิวเตอร์ด้วยการใช้โปรแกรมภาษาต่าง ๆ ซึ่งมีไลบรารีที่นักพัฒนาทั่วโลกได้ทำไว้มากมาย สามารถเข้าถึงได้จากสื่ออินเทอร์เน็ตทั่วไป ทั้งยังสามารถนำเอาหลักการอื่นมารวมเพื่อประยุกต์ใช้ต่อได้อีกหลากหลายแนวทาง [5] เช่น ประยุกต์เพิ่มเติมโดยการนำเอา Unscented Kalman Filter มาใช้ร่วมกับ RK4 ในการประมาณหามุม Pitch และ Yaw ของจรวดประดิษฐ์ขณะเคลื่อนที่ นอกจากนี้ยังมีสมการรุ่งเง-คุดตาในอันดับที่สูงขึ้นไปอีก เช่น RK5 [8], RK8 [9]-[10] และ RK10 [11]

บทความนี้จะนำเสนอวิธีการแก้ปัญหาเชิงตัวเลขของแนววิถีจรวดประดิษฐ์ โดยจะเริ่มจากนำเสนอสมการการเคลื่อนที่ของแนววิถีจรวดประดิษฐ์ โดยอ้างอิงจากแบบจำลองของ Modified Point Mass Trajectory Model ที่อยู่ในข้อตกลงมาตรฐาน STANAG 4355 [12] ขององค์การสนธิสัญญาแอตแลนติกเหนือ แล้วหาผลเฉลยของสมการนี้ด้วยวิธีการของรุ่งเง-คุดตาอันดับที่ 4 จากนั้นได้ทำการแสดงแนววิถีจรวดประดิษฐ์ให้เห็นถึงแนวโน้มการเปลี่ยนแปลงเมื่อค่าตัวแปรในสมการมีค่าไม่เท่ากัน โดยในบทความนี้จะนำเสนอวิธีของจรวดประดิษฐ์ในกรณีที่ค่าของแรงผลักดันที่เกิดจากการเชื้อเพลิง มวลของเชื้อเพลิง ความเร็วหมุนควงต้น

และมุมยกของจรวดประดิษฐ์ ณ จุดปล่อยจรวดประดิษฐ์แตกต่างกัน 7 มุม

1.1 การอ้างอิงระบบพิกัด (Coordinate systems) ของการเคลื่อนที่แบบไม่เป็นเชิงเส้นของซีปนวิถีของจรวดประดิษฐ์พื้นฐานสู่อากาศ

การอ้างอิงระบบพิกัดที่ใช้ในสมการการเคลื่อนที่ของจรวดประดิษฐ์ ประกอบไปด้วยพิกัดที่อยู่ในกรอบของระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian Coordinate System: CCS) อ้างอิงเพื่อให้สามารถจำลองสมการการเคลื่อนที่ได้ สำหรับโปรเจกไทล์ ระบบพิกัดที่อธิบายไว้ในส่วนนี้มีพื้นฐานมาจากบทความทางวิชาการ [2] เป็นระบบพิกัดคาร์ทีเซียน โดยที่ระนาบ 1-3 สร้างพื้นผิวสัมผัสของโลกโดยที่แกน 1 ชี้ไปในทิศทางของแนวสายตาและแกน 2 อัน ชี้ขึ้นตั้งฉากกับระนาบสัมผัสของโลก โดยที่มุมราบคือมุมระหว่างแกนที่ 1 ของระบบพิกัดที่กระทำกับทิศเหนือโดยมุมของละติจูดจะมีค่าเป็นบวกในซีกโลกเหนือและมีค่าเป็นลบในซีกโลกใต้ เราจะตั้งสมมติฐานว่ารูปทรงของโลกเป็นทรงกลมโดยประมาณที่มีรัศมี (R_z) และความเร็วควงที่เชิงมุม (Ω) ในการหมุนของโลกตามรูปที่ 1



รูปที่ ๑ การอ้างอิงระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian Coordinate System)

1.2 แบบจำลองพลวัต (Dynamical model) ของการเคลื่อนที่แบบไม่เป็นเชิงเส้นของจรวดประดิษฐ์พื้นสู่อากาศ

ในการสร้างสมการการเคลื่อนที่ของจรวดประดิษฐ์นี้ ตั้งอยู่บนสมมติฐาน 3 ข้อ คือ

1. จรวดประดิษฐ์มีความสมมาตรรอบแกนตามแนวยาวของจรวดประดิษฐ์ และส่งผลให้ค่าสัมประสิทธิ์ทางอากาศพลศาสตร์สมมาตรทั่วทั้งตัวจรวดประดิษฐ์

2. จุดศูนย์กลางความดันเป็นจุดเดียวกับจุดศูนย์กลาง เนื่องจากแรงขับกระทำตามแกนตามแนวยาวของจรวดประดิษฐ์ [13]

3. แรงผลักเรียงอย่างสมบูรณ์ตามแกนตามแนวยาวของจรวดประดิษฐ์ จึงทำให้มีแค่แรงขับจากส่วนดินขับ

สำหรับสมการของแรงที่กระทำที่จุดศูนย์กลางของจรวดประดิษฐ์ การเคลื่อนที่ของจรวดประดิษฐ์ทำได้โดยอาศัยสมการอธิบายการเคลื่อนที่แบบ 6 องศา (6 DOF) และสามารถแสดงสมการการเคลื่อนที่ของจรวดประดิษฐ์โดยใช้สมการที่คล้ายคลึงกับการเคลื่อนที่แบบไม่เป็นเชิงเส้นของจรวดประดิษฐ์ได้แก่ สมการ (4)-(12) ซึ่งล้วนเป็นสมการที่ไม่ขึ้นกับมวลทั้งสิ้น ต่างกับการเคลื่อนที่แบบไม่เป็นเชิงเส้นของจรวดประดิษฐ์ที่ปัจจัยของมวลเข้ามาเกี่ยวข้อง โดยเมื่อสร้างสมการการเคลื่อนที่ของจรวดประดิษฐ์ซึ่งเป็นสมการอนุพันธ์อันดับ 2 ที่ไม่เป็นเชิงเส้นเหล่านั้นมาปริพันธ์จะได้ผลเฉลยที่แสดงถึงค่าตำแหน่ง ค่าความเร็วของจรวดประดิษฐ์ โดยเทียบกับพิกัดอ้างอิง CCS ดังนี้

1.2.1 เวกเตอร์แสดงการเคลื่อนที่ของจรวดประดิษฐ์

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\vec{\dot{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\vec{\ddot{x}} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

โดยที่

\vec{x} เวกเตอร์ตำแหน่งของจรวดประดิษฐ์
ในแนวแกน 1, 2 และ 3

$\vec{\dot{x}}$ เวกเตอร์ความเร็วของจรวดประดิษฐ์
ในแนวแกน 1, 2 และ 3

$\vec{\ddot{x}}$ เวกเตอร์ความเร่งของจรวดประดิษฐ์
ในแนวแกน 1, 2 และ 3

1.2.2 เวกเตอร์แสดงแรงผลักของจรวดประดิษฐ์ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของมวลของจรวดประดิษฐ์

$$\vec{F}_{Th}(m) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

โดยที่

F_1 แรงผลักของจรวดประดิษฐ์
ในแนวแกน 1

F_2 แรงผลักของจรวดประดิษฐ์
ในแนวแกน 2

F_3 แรงผลักของจรวดประดิษฐ์
ในแนวแกน 3

1.2.3 เวกเตอร์ความเร็วเชิงมุมของโลก

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \Omega \cos(lat) \cos(az) \\ \Omega \sin(lat) \\ -\Omega \cos(lat) \sin(az) \end{pmatrix} \quad (5)$$

โดยที่

ω ความเร็วเชิงมุมของโลก

Ω ความเร็วเชิงมุมคงที่ของโลก

lat มุมละติจูดของจุดปล่อย

az มุมแอสิมัทของจุดปล่อย

1.2.4 เวกเตอร์ความเร็วสัมพัทธ์ของจรวดประดิษฐ์
เมื่อเทียบกับความเร็วลม

$$\vec{v} = \vec{x} - \vec{w} \quad (6)$$

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \quad (7)$$

โดยที่

\vec{v} เวกเตอร์ความเร็วสัมพัทธ์
ของจรวดประดิษฐ์

v ขนาดของเวกเตอร์ความเร็วสัมพัทธ์
ของจรวดประดิษฐ์

\vec{w} เวกเตอร์ของความเร็วลม

1.2.5 สมการคำนวณค่า “ยอร์ออฟรีโพส” (Yaw
of repose model)

$$\vec{\alpha}_e = -\frac{8I_x(m)p}{\pi d^3 \rho C_M v^4} (\vec{v} \times \vec{x}) \quad (8)$$

โดยที่

$\vec{\alpha}_e$ เวกเตอร์ของยอร์ออฟรีโพส

$I_x(m)$ ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยตามแกน
ตามแนวยาวของจรวดประดิษฐ์

p ความเร็วหมุนควงของจรวดประดิษฐ์

d เส้นผ่านศูนย์กลางของจรวดประดิษฐ์

ρ ความหนาแน่นของอากาศ

C_M ค่าสัมประสิทธิ์ยอร์ออฟรีโพส

1.2.6 สมการคำนวณแรงที่กระทำกับจรวดประดิษฐ์
เนื่องจากความเร่งโน้มถ่วง

$$\vec{F}_G = -m(t)g_0 \begin{pmatrix} \frac{x_1}{R_z} \\ 1 - \frac{2x_2}{R_z} \\ \frac{x_3}{R_z} \end{pmatrix} \quad (9)$$

โดยที่

$m(t)$ มวลของจรวดประดิษฐ์
ซึ่งเปลี่ยนแปลงตามเวลา

R_z รัศมีความโค้งของโลก

g_0 ค่าความเร่งโน้มถ่วงของโลก

1.2.7 สมการคำนวณเวกเตอร์ของแรงคอริโอลิส

$$\vec{F}_C = -2m(t)(\vec{\omega} \times \vec{x}) \quad (10)$$

1.2.8 สมการคำนวณค่าเวกเตอร์ของแรงเสียดทาน
ของตัวกลางอากาศ

$$\vec{F}_D = -\frac{\pi d^2}{8} C_{D0} v (\vec{v}) \quad (11)$$

โดยที่

C_{D0} ค่าสัมประสิทธิ์แรงเสียดทาน

1.2.9 สมการคำนวณค่าเวกเตอร์ของแรงยกของ
ตัวกลางอากาศ

$$\vec{F}_L = \frac{\pi d^2 \rho}{8} C_L v^2 (\vec{\alpha}_e) \quad (12)$$

โดยที่

C_L ค่าสัมประสิทธิ์แรงยกของ
ตัวกลางอากาศ

$\vec{\alpha}_e$ เวกเตอร์ของยอร์ออฟรีโพส

1.2.10 สมการคำนวณค่าเวกเตอร์ของแรงแมกนัส

$$\vec{F}_M = -\frac{\pi d^3 \rho}{8} C_{Mag} (\vec{\alpha}_e \times \vec{v}) \quad (13)$$

โดยที่

C_{Mag} ค่าสัมประสิทธิ์ของแรงแมกนัส

1.2.11 สมการคำนวณความเร่งหมุนควงของ จรวดประดิษฐ์

$$\dot{p} = -\frac{\pi \rho d^4 v C_{spin}}{8 I_x(m)} p \quad (14)$$

โดยที่

C_{spin} ค่าสัมประสิทธิ์การหมุนควงของ จรวดประดิษฐ์

โดยที่ $\vec{F}_C, \vec{F}_G, \vec{F}_D, \vec{F}_L$ และ \vec{F}_M คือ แรงเสียดทานอันเนื่องมาจากผลกระทบของคอรีออลิส แรงโน้มถ่วงของโลก แรงดูดอันเนื่องมาจากแรงต้านอากาศ แรงยกตัว แรงจากการหมุนควง [14] และ แรงแกนัส ตามลำดับ ซึ่งรูปแบบสมการของแรง แต่ละชนิดสามารถแสดงได้ดังตารางที่ 1 โดยในบทความนี้จะนำสมการข้างต้นมาประยุกต์ใช้ในการหาผลเฉลยของวิถีจรวดประดิษฐ์ด้วยวิธีรุงเง-คุดตา

2. ระเบียบวิธีของรุงเง-คุดตา

ระเบียบวิธีของรุงเง-คุดตา (Runge-Kutta method: RK) เป็นระเบียบวิธีที่นิยมใช้กันมากที่สุดในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ODE) [15]

รูปแบบสมการโดยทั่วไปสามารถแสดงได้ดังสมการที่ 15

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h \quad (15)$$

โดยที่ $\phi(x_i, y_i, h)$ คือ ฟังก์ชันส่วนเพิ่มสามารถเขียนกระจายได้ดังสมการที่ 16

$$\phi(x_i, y_i, h) = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n \quad (16)$$

a_i คือ ค่าคงที่ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$), n คือ อันดับของ RK, k_i คือ ฟังก์ชันของระเบียบวิธี RK โดยสามารถเขียนอยู่ในรูปแบบสมการที่ 17 ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \\ k_3 &= f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \\ &\dots \\ k_n &= f(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h \\ &\quad + \dots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h) \end{aligned} \quad (17)$$

บทความนี้จะใช้ระเบียบวิธีของรุงเง-คุดตา อันดับที่ 4 (RK4) มาประยุกต์ใช้ในการแก้สมการ เนื่องจากเป็นระเบียบวิธีที่ให้คำตอบได้แม่นยำมากที่สุด จากสมการที่ (15)-(17) เมื่อกำหนดให้ $n=4$ จะได้สมการ RK4 สำหรับใช้คำนวณหาแนววิถีจรวดประดิษฐ์ดังสมการที่ (18) ซึ่งสามารถนำไปใช้ในการเขียนในโปรแกรมคอมพิวเตอร์ MATLAB เพื่อหาผลเฉลยต่อไป

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \left[\frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \right] h \\ k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right) \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right) \\ k_4 &= f(x_i + h, y_i + hk_3) \end{aligned} \quad (18)$$

3. วิธีการ

ในการจำลองการเคลื่อนที่ของแนววิถีจรวดประดิษฐ์จำเป็นต้องอย่างยิ่งที่จะต้องทราบคุณสมบัติของจรวดประดิษฐ์ที่ใช้ ตลอดจนจนตัวแปรต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องทั้งหมดโดยละเอียด เนื่องจากค่าต่าง ๆ ที่จะนำมาใช้นั้นต้องอาศัยการวิจัย ศึกษา และ จำลองของจรวดประดิษฐ์ชนิดนั้น ๆ มาเป็นอย่างดี ซึ่งจำเป็นจะต้องใช้เวลาเป็นอย่างมากกว่าจะได้ค่าตัวแปรต่าง ๆ และความสัมพันธ์ของแต่ละตัวแปรโดยละเอียด เพื่อลดความซับซ้อนของการคำนวณแนววิถีของจรวดประดิษฐ์

จากสมการคำนวณการเคลื่อนที่ของจรวดประดิษฐ์โดยใช้กฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตัน สามารถสร้างสมการการเคลื่อนที่ของแนววิถีจรวดประดิษฐ์ตามพิกัดแกนต่าง ๆ ได้ตามสมการ (19)-(20)

$$\sum F = ma \quad (19)$$

$$m(t)\ddot{x} = \overline{F_C} + \overline{F_G} + \overline{F_D} + \overline{F_L} + \overline{F_M} + \overline{F_{T_h}}(m) \quad (20)$$

โดยเมื่อนำรวมเวกเตอร์ของแรงที่กระทำกับ จรวดประติษฐ์รวมทั้งแรงผลักรของจรวดประติษฐ์ที่เกิดจากเชื้อเพลิงหลังจากถูกปล่อยด้วยแรงผลักรจะมีค่าเท่ากับมวลของจรวดประติษฐ์ที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาคูณกับเวกเตอร์ของความเร่งของจรวดประติษฐ์ สอดคล้องตามกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตัน ดังนั้น จึงสามารถนำมาเขียนเวกเตอร์ 3 มิติ ซึ่งสามารถแบ่งเป็นอนุพันธ์อันดับ 2 ที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear second order differential equation) ได้ตามสมการ (21)-(23)

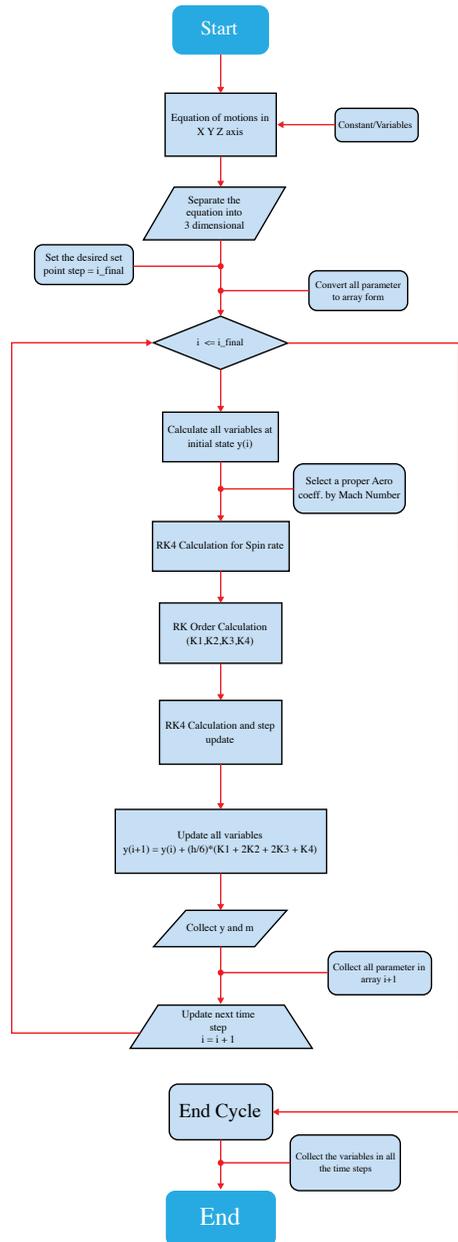
$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} = & -\frac{\pi d^2}{8m(t)} \rho C_{D0} v v_1 - \frac{\pi d^3}{8m(t)} \rho C_{Mag} (\alpha_{e2} v_3 - \alpha_{e3} v_2) \\ & + \frac{\pi d^2 \rho}{8m(t)} C_{La} v^2 \alpha_{e1} \\ & - 2\Omega[\sin(lat) \dot{x}_3 + \cos(lat) \sin(az) \dot{x}_2] - \frac{g_0 x_1}{R_z} \\ & + F_1(m) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_2}{dt^2} = & -\frac{\pi d^2}{8m(t)} \rho C_{D0} v v_2 - \frac{\pi d^3}{8m(t)} \rho C_{Mag} (\alpha_{e3} v_1 - \alpha_{e1} v_3) \\ & + \frac{\pi d^2 \rho}{8m(t)} C_{La} v^2 \alpha_{e2} \\ & + 2\Omega[\cos(lat) \sin(az) \dot{x}_1 + \cos(lat) \cos(az) \dot{x}_3] \\ & - g_0 \left(1 - \frac{2x_2}{R_z}\right) + F_2(m) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_3}{dt^2} = & -\frac{\pi d^2}{8m(t)} \rho C_{D0} v v_3 - \frac{\pi d^3}{8m(t)} \rho C_{Mag} (\alpha_{e1} v_2 - \alpha_{e2} v_1) \\ & + \frac{\pi d^2 \rho}{8m(t)} C_{La} v^2 \alpha_{e3} \\ & - 2\Omega[\cos(lat) \cos(az) \dot{x}_2 - \sin(az) \dot{x}_1] - \frac{g_0 x_3}{R_z} \\ & + F_3(m) \end{aligned} \quad (23)$$

สมการที่ (19)-(21) จะสามารถจัดให้อยู่ใน รูปแบบอย่างง่ายและสามารถนำไปใช้หาผลเฉลยด้วย ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในรูปแบบของสมการที่ (16) โดยในบทความนี้ได้ทำการเขียนโปรแกรมระเบียบวิธีเชิงตัวเลขด้วยภาษาทางคอมพิวเตอร์ MATLAB และนำเอาผลเฉลยมาแสดงผลแนววิถีของจรวดประติษฐ์ด้วย MATLAB ทั้งนี้ ได้ทำการจำลองปรับ ตัวแปรมุกของจรวดประติษฐ์ ด้วยวิธีการของ

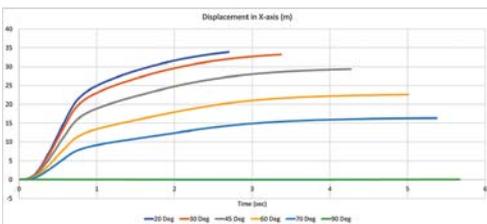
รุงเง-คุดตาอันดับที่ 4 จากนั้นได้ทำการแสดงแนววิถีจรวดประติษฐ์เป็นไปตามแผนผังการจำลองวิถีจรวดประติษฐ์ด้วยระเบียบวิธี RK4 ดังรูปที่ 2



รูปที่ 2 แผนผังการทำงานของโปรแกรมแก้หาผลเฉลยของวิถีจรวดประติษฐ์

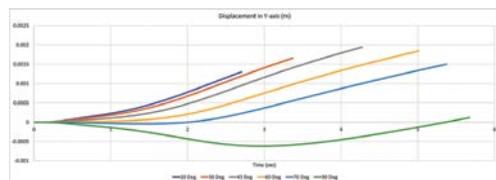
4. ผลการจำลอง

ในบทความนี้ได้จำลองเปลี่ยนค่ามุมยกของจรวดประดิษฐ์ที่ทำกับแนวระดับทั้ง 6 ค่า คือ 20, 30, 45, 60 และ 70 องศา ผลเฉลยของการจำลองแนววิถีจรวดประดิษฐ์สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 3-7 ซึ่งแสดงให้เห็นว่าแนววิถีของจรวดประดิษฐ์จะมีระดับความสูงที่แตกต่างกันอย่างชัดเจน นอกจากนี้แล้วจะส่งผลให้ตำแหน่งของจรวดประดิษฐ์ ณ เวลาใด ๆ มีค่าที่แตกต่างกัน โดยจะเห็นได้ชัดเมื่อเวลาเพิ่มขึ้น ในการจำลองวิธีนี้หากทราบค่าตัวแปรต่าง ๆ ที่ละเอียดยิ่งขึ้น เช่น ระยะทางในแนวแกน x, y, z และขนาดของความเร็วลัพธ์ หรือทราบความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรนี้กับเวลาการบิน ดังรูปที่ 3-6 เมื่อทราบความสัมพันธ์แล้วจะสามารถปรับเปลี่ยนค่าเพิ่มเติมเพื่อหาผลเฉลยที่แม่นยำยิ่งขึ้นได้ ซึ่งจะส่งผลให้ผลเฉลยหรือแนววิถีของจรวดประดิษฐ์ที่ได้มีความแม่นยำมากขึ้น ซึ่งในจุดนี้บ่งชี้ให้เห็นว่าในการออกแบบระบบจรวดประดิษฐ์นั้น จำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องมีการคำนวณแนววิถีจรวดประดิษฐ์นี้โดยละเอียดและครอบคลุมทุกด้านเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพการยิงให้ดียิ่งขึ้น



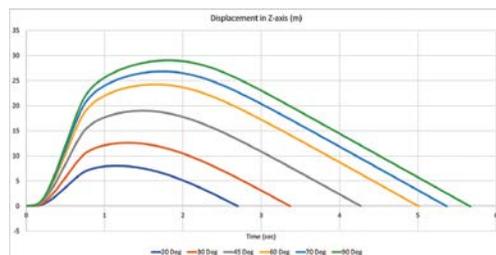
รูปที่ 3 ระยะทางในแนวแกน x ของจรวดประดิษฐ์ในมุมยกที่แตกต่างกัน

ในมุมยก 90 องศา จะสังเกตว่าแทบจะไม่มี การเปลี่ยนแปลงระยะทางในแนวระนาบ x เมื่อเทียบกับมุมยกอื่น ๆ ในทางตรงข้ามมุมยก 20 องศา นั้นมีระยะทางในแนวระนาบที่มากที่สุด โดยมีระยะทางมากที่สุด 35 เมตร โดยประมาณในส่วนใหญ่ เพราะมีค่าแรงเสียดทานของอากาศที่น้อยที่สุดตลอดช่วงการบิน โดยจะสังเกตว่าเมื่อมุมยกเริ่มต้นมีค่ามากขึ้นจะทำให้ค่าระยะทางในแนวระนาบน้อยลงลงอย่างมีนัยสำคัญ จึงสามารถสรุปได้ว่าระยะทางในแนวระนาบของจรวดประดิษฐ์นั้นแปรผกผันกับมุมยกเริ่มต้น



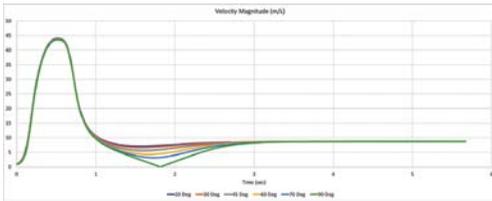
รูปที่ 4 ระยะทางในแนวแกน y ของจรวดประดิษฐ์ในมุมยกที่แตกต่างกัน

ระยะทางในแนวระนาบ y นั้น จะสังเกตได้ว่าเมื่อเทียบกับระยะทางในแนวแกนอื่น ๆ แทบจะไม่มี การเปลี่ยนแปลงตลอดช่วงการบิน โดยตัวแปรที่มีความเป็นไปได้ที่จะมีผลกับการเคลื่อนที่ในแนวแกนนี้ คือ ค่าความเร็วหมุนควงของจรวด ซึ่งส่งผลต่อค่าออร์บิโทรัส และท้ายที่สุดส่งผลต่อระยะทางในแนวระนาบ y



รูปที่ 5 ระยะทางในแนวแกน z ของจรวดประดิษฐ์ในมุมยกที่แตกต่างกัน

ในส่วนของระยะทางในแนวแกนสูง (z-axis) นั้น สามารถสรุปได้ว่า ความสูงที่จรวดประดิษฐ์สามารถทำได้จะอยู่ในช่วงที่แรงขับของจรวดล้นสุดลง ซึ่งจะเป็นช่วงเวลา 0.9 วินาที โดยจากนั้นจะเคลื่อนที่ต่อด้วยความเฉื่อยของจรวดจนถึงจุดที่มีความสูงสูงสุดในมุมยก 90 องศา และเมื่อมุมยกต่ำลง จะสังเกตเห็นว่า ค่าความสูงสูงสุดนั้นจะลดลงอย่างมีนัยสำคัญ อันเนื่องมาจากความเร็วที่ถูกแจกแจงในแนวแกนสูงจะแปรผันอย่างชัดเจนกับมุมยก จึงสรุปได้ว่ามุมยกเริ่มต้นนั้นแปรผันกันกับความสูงที่จรวดสามารถทำได้



รูปที่ ๒ ความเร็วลัพท์ของจรวดประดิษฐ์ในมุมยกที่แตกต่างกัน

ในกรณีของความเร็วลัพท์ของจรวดประดิษฐ์ จะสังเกตเห็นว่าในมุมยกทั้งหมดนั้นจะมีความเร็วลัพท์ซึ่งคำนวณมาจากการบวกแบบเวกเตอร์ของความเร็วจรวดทั้ง 3 แกนที่ใกล้เคียงกันมาก โดยเฉพาะในช่วงเวลาที่จรวดยังมีแรงขับอยู่นั้นคือช่วง 0 ถึง 0.9 วินาที ซึ่งทำให้จรวดสามารถรักษาความเสถียรไว้ได้และทำความเร็วได้สูงสุดถึง 45 เมตรต่อวินาที จากนั้นเคลื่อนที่ต่อด้วยความเร็วอันเนื่องมาจากแรงโน้มถ่วงของโลกและแรงทางอากาศพลศาสตร์ซึ่งมีความเร็วลัพท์คงที่ นั่นคือ 10 เมตรต่อวินาที

4.1 การคำนวณหาวิถีจรวดประดิษฐ์ในตัวแปรที่เปลี่ยนแปลง

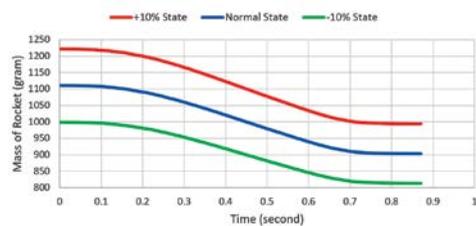
การคำนวณหาวิถีจรวดประดิษฐ์ในสถานการณ์จริงนั้น มีความเป็นไปได้น้อยที่จรวดประดิษฐ์จะเคลื่อนที่ไปตามมุมยกในรูปแบบของเลขจำนวนเต็มตามตัวอย่างของวิถีจรวดประดิษฐ์ที่แสดงข้างต้น ในทางตรงข้าม การเคลื่อนที่ของจรวดประดิษฐ์นั้นมีแนวโน้มที่จะมีมุมยกของการปล่อยจรวดประดิษฐ์ (Elevation Angle) ความเร็วหมุนควงเริ่มต้น (Initial Spin-rate) อัตราการเผาไหม้ของเชื้อเพลิง (Propellant Burning Rate) และแรงผลักดันของจรวดประดิษฐ์ (Thrust Force) โดยตัวแปรเหล่านี้ (Input) ล้วนมีผลอย่างยิ่งต่อการคำนวณเพื่อหาวิถีของจรวดประดิษฐ์ทั้งสิ้น เพื่อให้ครอบคลุมการเปลี่ยนแปลงที่อาจเกิดขึ้นของตัวแปรดังกล่าว การเตรียมข้อมูลผลเฉลยของสมการจรวดประดิษฐ์จึงจำเป็นต่อการหาวิถีจรวดประดิษฐ์ในตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงตามสถานการณ์จริงในขั้นตอนการเตรียมคำนวณเพื่อหาวิถีของจรวดประดิษฐ์ที่ตัวแปรสามารถเปลี่ยนแปลงได้ จึงต้องเริ่มหาวิถีของจรวดประดิษฐ์ที่มีมุมยก 10, 20, 30, 45, 60, 70 และ 90 องศา พร้อมทั้งความเร็วหมุนควงเริ่มต้น อัตราการเผาไหม้ของเชื้อเพลิง และแรงผลักดันของจรวดประดิษฐ์ ที่มีสภาวะปกติ (Normal State) สภาวะเพิ่มขึ้น 10 เปอร์เซ็นต์ (+10% State) และสภาวะต่ำลง 10 เปอร์เซ็นต์ (-10% State) จึงทำให้ในการคำนวณของ 1 มุมยก จะถูกแบ่งออกเป็น 3 สภาวะ ดังนั้น ในการคำนวณหาวิถีจรวดประดิษฐ์ให้ครบมุมยกทั้ง 7 มุม ที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น จึงทำให้เกิดรูปแบบของการคำนวณทั้งหมด 21 รูปแบบ ดังตารางที่ 1 ต่อไปนี้

ตารางที่ 1 ค่าสภาวะเริ่มต้นของแต่ละมุมยก

State	Spin-rate (rad/s)	Mass of Rocket (kg)	Thrust Force (N)	Elevation Angle (Deg)
-10% State	0.9427	0.9996	4.8501	10
Normal State	1.0471	1.1107	5.3891	
+10% State	1.1519	1.2218	5.928	
-10% State	0.9427	0.9996	4.8501	20
Normal State	1.0471	1.1107	5.3891	
+10% State	1.1519	1.2218	5.928	
-10% State	0.9427	0.9996	4.8501	30
Normal State	1.0471	1.1107	5.3891	
+10% State	1.1519	1.2218	5.928	
-10% State	0.9427	0.9996	4.8501	45
Normal State	1.0471	1.1107	5.3891	
+10% State	1.1519	1.2218	5.928	
-10% State	0.9427	0.9996	4.8501	60
Normal State	1.0471	1.1107	5.3891	
+10% State	1.1519	1.2218	5.928	
-10% State	0.9427	0.9996	4.8501	70
Normal State	1.0471	1.1107	5.3891	
+10% State	1.1519	1.2218	5.928	
-10% State	0.9427	0.9996	4.8501	90
Normal State	1.0471	1.1107	5.3891	
+10% State	1.1519	1.2218	5.928	

สำหรับอัตราการเผาไหม้ของเชื้อเพลิงและแรงผลักของจรวดประติศฐ์นั้น มีความสัมพันธ์กันโดยตรง ซึ่งในสภาวะเพิ่มขึ้น 10 เปอร์เซ็นต์ จะมีมวลของเชื้อเพลิงมากกว่าสภาวะปกติ จึงก่อให้เกิดแรงผลักของจรวดประติศฐ์ที่เพิ่มขึ้น ในทางตรงข้ามสภาวะต่ำลง 10 เปอร์เซ็นต์ จะมีมวลของเชื้อเพลิงน้อยกว่าสภาวะปกติ จะทำให้มีแรงผลักของจรวดประติศฐ์ที่น้อยกว่า ดังต่อไปนี้

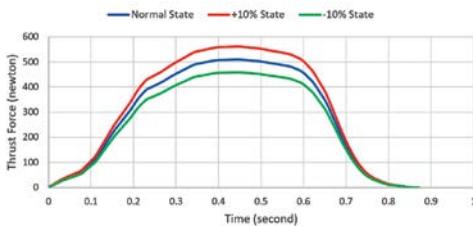
4.1.1 อัตราการเผาไหม้ของเชื้อเพลิง



รูปที่ ๗ อัตราการเผาไหม้ของเชื้อเพลิงทั้ง 3 สภาวะ

เชื้อเพลิงของจรวดนั้นเป็นตัวแปรที่มีผลสำคัญต่อวิถีของจรวดอย่างยิ่ง เนื่องจากมวลของจรวดเป็นปัจจัยหลักที่จุดความสูงลงอย่างเห็นได้ชัด ซึ่งเมื่ออัตราเผาไหม้ของจรวดนั้นมีค่ามากจะทำให้จรวดมีช่วงเวลาในการรับภาระน้ำหนักของเชื้อเพลิงน้อยลงทำให้เคลื่อนที่ได้อย่างอิสระมากขึ้นตามมา

4.1.2 อัตราการสร้างแรงผลักของจรวดประติษฐ์ (Thrust Generated Rate)



รูปที่ ๘ อัตราการสร้างแรงผลักของจรวดประติษฐ์ทั้ง 3 สภาวะ

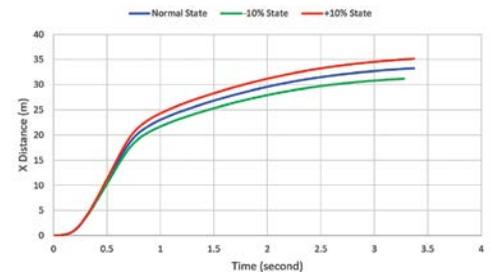
ในการจำลองเพิ่มและลดมวลของเชื้อเพลิงจรวดนั้น จะสามารถทำให้แรงขับของจรวดเพิ่มขึ้นเช่นเดียวกัน เมื่อมวลของเชื้อเพลิงลดลงจะทำให้สร้างแรงขับได้น้อยลงตามลำดับ ด้วยเหตุนี้จึงสามารถคาดการณ์ได้ว่าจะทำให้วิถีของจรวดนั้นโค้งขึ้นเมื่อมีเชื้อเพลิงที่มากขึ้น

5. ผลการจำลองวิถีจรวดประติษฐ์ในตัวแปรที่เปลี่ยนแปลง (Rocket Trajectory)

ในการคำนวณเพื่อหาวิถีของจรวดประติษฐ์ทั้ง 21 รูปแบบ ที่กล่าวไว้ข้างต้นนั้น มีขั้นตอนในการคำนวณได้ตามแผนผังวิธีการดำเนินการ ซึ่งเป็นไปตามวัฏจักรในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสมการจรวดประติษฐ์ ซึ่งแสดงไว้ตามรูปที่ 13 เป็นวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลข (Numerical analysis) ซึ่งเป็นการแก้หาผลเฉลยทางคณิตศาสตร์ของสมการจรวดประติษฐ์ในรูปแบบของตำแหน่งของจรวด

ประติษฐ์ในแนวแกน x, y และ z ซึ่ง z จะแสดงตำแหน่งความสูงของจรวดประติษฐ์ (Altitude) และความเร็วลัพท์ (Velocity) โดยจะเปรียบเทียบดังตัวอย่างต่อไปนี้

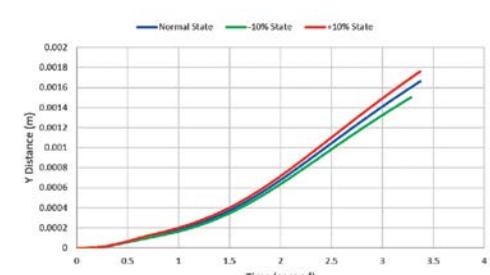
5.1 การเปรียบเทียบระยะทางในแนวแกน X ของมูมยกที่ 30 องศา ทั้ง 3 สภาวะ



รูปที่ ๙ กราฟเปรียบเทียบระยะทางในแนวแกน X ของมูมยกที่ 30 องศา ทั้ง 3 สภาวะ

ในส่วนของระยะทางในแนวแกน x เป็นไปตามที่คาดการณ์ไว้ ระยะทางในแนวแกน x มีค่าเพิ่มขึ้น โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อผ่านช่วงที่จรวดประติษฐ์ยังมีแรงขับและเคลื่อนที่ต่อตามแรงโน้มถ่วง

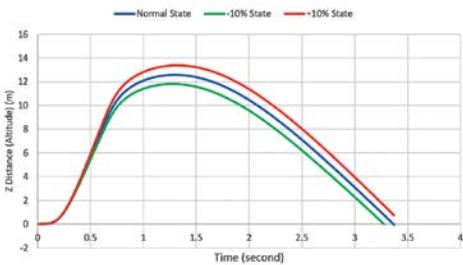
5.2 การเปรียบเทียบระยะทางในแนวแกน Y ของมูมยกที่ 30 องศา ทั้ง 3 สภาวะ



รูปที่ ๑๐ กราฟเปรียบเทียบระยะทางในแนวแกน Y ของมูมยกที่ 30 องศา ทั้ง 3 สภาวะ

เช่นเดียวกันกับระยะทางในแนวแกน x ระยะทางในแนวแกน y นั้น แม้จะเพิ่มขึ้นตามมวลของเชื้อเพลิง แต่ไม่เพียงพอที่จะเปลี่ยนวิถีการบินของจรวดประดิษฐ์ได้

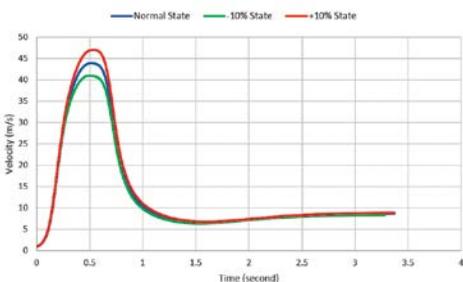
5.3 การเปรียบเทียบระยะทางในแนวแกน Z ของมูมยกที่ 30 องศา ทั้ง 3 สถานะ



รูปที่ ๑๑ กราฟเปรียบเทียบระยะทางในแนวแกน Z ของมูมยกที่ 30 องศา ทั้ง 3 สถานะ

ในแนวแกนความสูงนั้น ในสถานะที่เชื้อเพลิงเพิ่มขึ้นทำให้น้ำหนักของจรวดประดิษฐ์หนักขึ้นตามมาด้วย แม้ว่าน้ำหนักที่เพิ่มขึ้นจะทำให้เกิดแรงโน้มถ่วงที่จุดจรวดลงก็ตาม แต่จากการจำลองคำนวณเพื่อหาความสูงที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาการบิน การเพิ่มเชื้อเพลิงกลับทำให้เกิดความสูงที่เพิ่มอย่างเห็นได้ชัด

5.4 การเปรียบเทียบความเร็วจรวดประดิษฐ์ในมูมยกที่ 30 องศา ทั้ง 3 สถานะ



รูปที่ ๑๒ กราฟเปรียบเทียบความเร็วลัพท์ในมูมยกที่ 30 องศา ทั้ง 3 สถานะ

เชื้อเพลิงนั้นมีบทบาทสำคัญในการกำหนดแรงขับที่เกิดจากจรวด ซึ่งจะกำหนดความเร็วผลลัพธ์ของจรวด เมื่อปริมาณเชื้อเพลิงจรวดเพิ่มขึ้น แรงขับที่เกิดขึ้นก็เพิ่มขึ้นเช่นกัน ส่งผลให้ความเร็วของจรวดเพิ่มขึ้น ในทางกลับกัน เมื่อปริมาณของจรวดขับดันลดลง แรงขับที่เกิดขึ้นก็ลดลงเช่นกัน ส่งผลให้ความเร็วของจรวดลดลงอย่างมีนัยสำคัญ

6. บทสรุป

โดยสรุป วิธีการเคลื่อนที่ของจรวดประดิษฐ์นั้นได้รับผลกระทบอย่างมากจากตัวแปรต่าง ๆ เช่น มุมยก ความเร็วหมุนควงเริ่มต้น อัตราการเผาไหม้ของจรวด และแรงขับดัน ผลการจำลองแสดงให้เห็นว่า ระยะทางในแนวนอนของจรวดประดิษฐ์แปรผกผันกับมุมยกเริ่มต้น ในขณะที่ความสูงที่จรวดสามารถเข้าถึงได้นั้นแปรผันโดยตรงกับมุมยกเริ่มต้น นอกจากนี้ อัตราการเผาไหม้ของเชื้อเพลิงและแรงขับของจรวดประดิษฐ์มีความสัมพันธ์โดยตรง โดยที่เชื้อเพลิงที่เพิ่มขึ้นส่งผลให้แรงขับเพิ่มขึ้น และการลดลงของเชื้อเพลิงส่งผลให้แรงขับลดลงเช่นกัน จากผลการจำลองยังเผยให้เห็นว่า แม้ว่าจะระยะทางในแกน x และ y จะได้รับผลกระทบจากมวลเชื้อเพลิง แต่ก็ไม่มีความสำคัญต่อวิถีโคจรของจรวดประดิษฐ์ อย่างไรก็ตาม ความสูงและความเร็วของจรวดได้รับผลกระทบอย่างมากจากมวลของเชื้อเพลิงโดยรวมแล้ว การจำลองให้ข้อมูลเชิงลึกอันมีค่าเกี่ยวกับปัจจัยที่ส่งผลต่อวิถีโคจรของจรวดประดิษฐ์ ซึ่งสามารถใช้เพื่อปรับปรุงการออกแบบและประสิทธิภาพของจรวดในอนาคต การค้นพบนี้ชี้ให้เห็นว่า ในขณะที่การควบคุมมวลของเชื้อเพลิงและการปรับอัตราการเผาไหม้นั้นมีความสำคัญในการปรับวิถีโคจรของจรวดให้เหมาะสม ปัจจัยอื่น ๆ เช่น แรงฉุดและแรงยกทางอากาศพลศาสตร์ ความสูง และแรงขับ จะต้องนำมาพิจารณาด้วย เพื่อให้ได้ข้อสรุปที่น่าเชื่อถือมากขึ้น การจำลองที่มีรายละเอียดมากขึ้นสามารถทำได้โดย

ดำเนินการเพื่อสำรวจผลกระทบจากแรงทางอากาศพลศาสตร์ โดยเฉพาะการปรับความเร็วและปริมาณเชื้อเพลิงที่ใช้ในช่วงเวลาต่าง ๆ ระหว่างการบิน ตลอดจนการเปลี่ยนแปลงการออกแบบจรวดประดิษฐ์สามารถจำลองเพื่อให้สังเกตได้ถึงผลกระทบต่อวิถีของจรวดประดิษฐ์ที่อาจเกิดขึ้นระหว่างการบิน

7. เอกสารอ้างอิง

- [1] R. L. McCoy, *Modern Exterior Ballistics: The Launch and Flight Dynamics of Symmetric Projectiles*. Atglen, PA, USA: Schiffer Publishing, 1999.
- [2] A. Ko, K. Chang, D. Sheen, C. Lee, Y. Park, and S. Park, "Projectile Prediction and Analysis of the Aerodynamic Characteristics of a Spinning Projectile Based on Computational Fluid Dynamics," *Def. Sci. J.*, vol. 188, pp. 132-147, 2020.
- [3] S. Gupta, S. Saxena, A. Singhal, and A. K. Ghosh, "Trajectory Correction Flight Control System Using Pulsejet on an Artillery Rocket," *Def. Sci. J.*, vol. 58, no. 1, pp. 15-33, Jan. 2008.
- [4] G. Arora, V. Joshi, and I. S. Garki, "Developments in Runge-Kutta Method to Solve Ordinary Differential Equations," in *Recent Advances in Mathematics for Engineering*, 1st ed. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2020, ch. 9, pp. 193 - 202, doi: 10.1201/9780429200304-9.
- [5] L. An, L. Wang, N. Liu, J. Fu, and Y. Zhong, "A Novel Method for Estimating Pitch and Yaw of Rotating Projectiles Based on Dynamic Constraints," *Sensors*, vol. 19, no. 23, p. 5096, 2019.
- [6] C. J. Voesenek, "Implementing a Fourth Order Runge-Kutta Method for Orbit Simulation," 2008, pp. 1 - 3. [Online]. Available: <http://spiff.rit.edu/richmond/nbody/OrbitRungeKutta4.pdf>
- [7] P. G. Thomsen, "A Generalized Runge-Kutta Method of Order Three," 2002. [Online]. Available: <http://www2.imm.dtu.dk/pubdb/pubs/858-full.html>
- [8] F. Rabiei, "Fifth-order Improved Runge-Kutta Method with Reduced Number of Function Evaluations," *Aust. J. Basic Appl. Sci.*, vol. 6, no. 3, pp. 97 - 105, Jan. 2012.
- [9] H. Séka and K. R. Assui, "Order of the Runge-Kutta Method and Evolution of the Stability Region," *Ural Math. J.*, vol. 5, no. 2, p. 64, Dec. 2019, doi: 10.15826/umj.2019.2.006.
- [10] S. Hippolyte and A. K. Richard, "A New Eighth Order Runge-Kutta Family Method," *J. Math. Res.*, vol. 11, no. 2, pp. 190 - 199, Mar. 2019, doi: 10.5539/jmr.v11n2p190.
- [11] T. Feagin, "A Tenth-order Runge-Kutta Method with Error Estimate," in *IAENG Int. Conf. Sci. Comput.*, Hong Kong, 2007.
- [12] R. F. Lieske and M. L. Reiter, "Equations of Motion for a Modified Point Mass Trajectory," Ballistic Research Laboratories, Aberdeen Proving Ground, MD, USA, Rep. 1314, 1966.
- [13] L. Baranowski, "Feasibility Analysis of the Modified Point Mass Trajectory Model for the Need of Ground Artillery Fire Control Systems," *J. Theor. Appl. Mech.*, vol. 51, no. 3, pp. 511 - 522, Jan. 2013.
- [14] L. Baranowski, "Equations of Motion of a Spin-stabilized Projectile for Flight Stability Testing," *J. Theor. Appl. Mech.*, vol. 51, no. 1, pp. 235 - 246, Jan. 2013.
- [15] L. Baranowski, "Effect of the Mathematical Model and Integration Step on the Accuracy of the Results of Computation of Artillery Projectile Flight Parameters," *Bull. Pol. Acad. Sci.: Tech. Sci.*, vol. 61, no. 2, pp. 475 - 484, Jun. 2013, doi: 10.2478/bpasts-2013-0047.