

การศึกษาการแก้สมการเชิงตัวเลขด้วยวิธีของรุงเงและคุตตา สำหรับสมการการเคลื่อนที่แบบไม่เป็นเชิงเส้นของแนววิถีกระสุน

ภูมิเรศ แสงราม¹ กฤติยา พาอิม² และ ชนะ รัชศิริ^{2*}

วันที่รับ 23 มิถุนายน 2563 วันที่แก้ไข 17 สิงหาคม 2563 วันตอบรับ 19 สิงหาคม 2563

บทคัดย่อ

เมื่อกระสุนเคลื่อนที่ออกจากปากกระบอกปืนจะผ่านตัวกลางซึ่งเป็นอากาศไปยังพื้นที่เป้าหมายตามแนวการเคลื่อนที่ที่ได้ออกแบบไว้ แต่เนื่องจากมีปัจจัยต่าง ๆ ส่งผลให้การเคลื่อนที่ของแนววิถีกระสุนเบี่ยงเบนไปจากทิศทางปกติที่ได้ออกแบบไว้และมีลักษณะของสมการเป็นแบบไม่เป็นเชิงเส้น จึงมีความจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องทำการศึกษา ออกแบบ และแก้ปัญหการเคลื่อนที่แบบไม่เป็นเชิงเส้นนี้ เพื่อลดความผิดพลาดที่อาจจะเกิดขึ้น และเพิ่มประสิทธิภาพของความแม่นยำของการยิงต่อไป การแก้ปัญหสมการการเคลื่อนที่แบบไม่เป็นเชิงเส้นสามารถทำได้หลายวิธี โดยในบทความนี้นำเสนอวิธีการหาผลเฉลยของสมการด้วยวิธีการของรุงเงและคุตตาอันดับที่ 4 โดยใช้สมการการเคลื่อนที่ของแนววิถีกระสุนอ้างอิงจากแบบจำลองของ Modified Point Mass Trajectory Model ซึ่งได้ทดลองเปลี่ยนค่าความเร็วของกระสุนขณะออกจากปากกระบอกปืนจำนวน 5 ค่า ผลการจำลองแสดงให้เห็นว่าแนววิถีกระสุนที่ความเร็วต้นต่างกันจะเบี่ยงเบนไปจากแนวปากกระบอกปืนเดิม นอกจากนั้นแล้วจะส่งผลให้ตำแหน่งของกระสุน ณ เวลาใด ๆ มีค่าที่แตกต่างกันโดยจะเห็นได้ชัดเมื่อเวลาเพิ่มขึ้น วิธีรุงเงและคุตตาที่ใช้ในบทความนี้เป็นวิธีที่มีความสะดวกรวดเร็วให้ผลเฉลยที่ค่อนข้างแม่นยำในทางทฤษฎี สามารถประยุกต์ใช้เพื่อพัฒนาระบบสมองกลฝังตัวเฉพาะงานต่อไปได้อีกด้วย

คำสำคัญ: สมการวิถีกระสุน, การเคลื่อนที่แบบไม่เป็นเชิงเส้น, ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา

¹ สาขาวิศวกรรมไฟฟ้าเครื่องกลการผลิต ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

² ภาควิชาวิศวกรรมอุตสาหการ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

* Corresponding author, E-mail: fengcnr@ku.ac.th

The Study of Runge-Kutta Numerical Solution for Non-Linear Ballistic Differential Equation.

Phumaret Saengram ¹ Krittiya Pa-im ² and Chana Raksiri ^{2*}

Received 23 June 2020 Revised 17 August 2020 Accepted 19 August 2020

Abstract

When the ballistic moves out of the muzzle through the air to the target area followed by the trajectory that has been designed. However, there are many factors that cause a ballistic trajectory to deviate and become a non-linear equation. Therefore, it is necessary to study, design and solve motion problems to reduce errors. There are many ways to solve non-linear differential equations. In this article, presented a method of Runge-Kutta 4th order solution by using the equation of the ballistic trajectory based on the Modified Point Mass Trajectory Model. The experiment will vary the speed of the ballistic while leaving the muzzle. As a result, the ballistic trajectory at different initial velocity will deviate from the regular muzzle. In addition, the position of the ballistic will be different at various times. The Runge-Kutta method obtains an accurate solution which can be applied to develop embedded specialized systems.

Keywords: Non-linear, Ballistic, Runge-Kutta, Modified Point Mass Trajectory Model

¹ Electrical-Mechanical Manufacturing Engineering Program, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Kasetsart University.

² Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering, Kasetsart University

* Corresponding author, E-mail: fengcnr@ku.ac.th

1. บทนำ

ซิปนวิธ (Ballistic) คือการศึกษาการเคลื่อนที่ของกระสุน ตั้งแต่เมื่อกระสุนอยู่ภายในลำกล้อง ผ่านปากลำกล้อง และเคลื่อนที่ไปในตัวกลาง และตกยังพื้นที่เป้าหมาย โดยที่ความแม่นยำและอำนาจของการยิงนั้นจะขึ้นอยู่กับความแม่นยำของการศึกษาและออกแบบการเคลื่อนที่ของกระสุนในทุกระยะ ซึ่งสามารถย่อยออกเป็น 3 ชนิด อันได้แก่ (1) ซิปนวิธภายใน (Internal Ballistic) เป็นการศึกษาเกี่ยวกับวิธีการขับเคลื่อนภายในลูกกระสุน เช่น การเผาไหม้ อัตราการเผาไหม้ที่เหมาะสม แรงขับ ดินขับ แก๊ส หรือเชื้อเพลิงแบบต่าง ๆ (2) ซิปนวิธภายนอก (External Ballistic) เป็นการศึกษาการเคลื่อนที่ของกระสุนตั้งแต่หลังจากออกจากปากลำกล้องจนถึงเป้าหมาย และ (3) ซิปนวิธเมื่อกระสุนตกเป้าหมาย (Terminal Ballistic) เป็นการศึกษาพฤติกรรมขั้นสุดท้าย เมื่อกระสุนกระแทกเป้าหมาย โดยเมื่อพิจารณาจากซิปนวิธทั้ง 3 ชนิดข้างต้นแล้วพบว่า ซิปนวิธภายนอกนั้นมีความน่าสนใจอยู่หลายประเด็น โดยประเด็นแรกเป็นช่วงการเคลื่อนที่ของกระสุนที่ใช้เวลาค่อนข้างมากเมื่อเทียบกับการศึกษาซิปนวิธชนิดอื่น ๆ เนื่องจากนับตั้งแต่วินาทีที่กระสุนออกจากกระบอกปืน จนถึงถึงตำแหน่งตำบลเป้าหมาย ประเด็นที่สองเป็นช่วงที่กระสุนต้องเคลื่อนที่ผ่านตัวกลาง ซึ่งมีความผันผวนของตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่ค่อนข้างสูง ซึ่งถือว่าเป็นส่วนที่ส่งผลต่อความแม่นยำของการยิงค่อนข้างมาก

เมื่อกระสุนซึ่งมีมวลและแรงขับเคลื่อนที่ออกจากปากกระบอกปืนด้วยความเร็วปากกระบอกปืน (Muzzle Velocity) กระสุนจะหมุน (Spin) รอบแนวการเคลื่อนที่ (Ballistic Axis) ด้วยความเร็วเชิงมุม (Spin Velocity) ที่เกิดจากลำกล้องปืน ผ่านตัวกลาง (Medium) ซึ่งเป็นอากาศ ไปยังพื้นที่เป้าหมายตามแนวการเคลื่อนที่ที่ได้ออกแบบไว้ (Desired Trajectory) แต่เนื่องจากปัจจัยจากแรงโน้มถ่วงของโลก ความหนาแน่นของอากาศ ปัจจัยจากธรรมชาติอื่น ๆ เช่น ลม อุณหภูมิ และ ฝน ซึ่งสิ่งต่าง ๆ เหล่านี้ส่งผลให้เกิดแรงต้านการ

เคลื่อนที่ของกระสุน อันได้แก่ แรงต้านอากาศ (Drag force) แรงยกตัว (Lift force), แรงโคริออริส (Coriolis force) แรงแมกนัส (Magnus force) และ แรงโน้มถ่วงของโลก (Gravity force) ซึ่งแรงต่าง ๆ ที่ไม่พึงประสงค์เหล่านี้ ส่งผลให้การเคลื่อนที่ของแนววิถีกระสุนเบี่ยงเบนไปจากทิศทางปกติที่ออกแบบไว้และมีลักษณะของสมการเป็นแบบไม่เป็นเชิงเส้น จึงมีความจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องทำการศึกษา ออกแบบ และแก้ปัญหาการเคลื่อนที่แบบไม่เป็นเชิงเส้นนี้ให้ดีกว่าวิธีอื่นที่จะทำการพัฒนาขึ้นมาใช้งานจริง ๆ เพื่อลดความผิดพลาดที่อาจจะเกิดขึ้นและเพิ่มประสิทธิภาพของความแม่นยำของการยิงต่อไป

การแก้ปัญหามสมการการเคลื่อนที่แบบไม่เป็นเชิงเส้นโดยใช้วิธีหาผลเฉลยทางตรงนั้นมีความซับซ้อนค่อนข้างสูง ซึ่งปัจจุบันนิยมใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อลดเวลาและเพิ่มความสะดวกในทางปฏิบัติ การหาผลเฉลยสามารถทำหลายวิธี [1] เช่น ประยุกต์ใช้กฎของนิวตันมาสร้างสมการการเคลื่อนที่ของแนววิถีกระสุนทั้งในกรณีที่มีและไม่มีผลกระทบจากความเร็วลม แล้วใช้ระเบียบวิธีของออยเลอร์ (Euler's method) หาคความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางและทิศทางของการยิงกับแนวการเคลื่อนที่ของกระสุน ระเบียบวิธีของออยเลอร์ถือเป็นวิธีที่ไม่ซับซ้อน แต่เนื่องจากวิธีนี้ให้ความถูกต้องของผลเฉลยไม่สูงมาก [2] จึงได้มีการปรับปรุงระเบียบวิธีของออยเลอร์ (Improved Euler's method) ขึ้นมาเพื่อช่วยเพื่อลดความผิดพลาดของผลเฉลยนี้ นอกจากนั้นแล้วยังมีระเบียบวิธีเชิงตัวเลขอื่น ๆ ที่มีประสิทธิภาพมากขึ้น เช่น วิธีของรุงเงและคุตตา (Runge-Kutta: RK) และการปรับปรุงระเบียบวิธีอื่น ๆ โดยใช้พื้นฐานของรุงเงและคุตตาเพื่อให้ผลเฉลยมีความถูกต้องแม่นยำเพิ่มขึ้น

ระเบียบวิธีของรุงเงและคุตตาเป็นเทคนิคการประมาณคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่ได้รับคามนิยมอย่างมากในการคำนวณซิปนวิธในปัจจุบัน เนื่องจากเป็นวิธีที่เหนือกว่าวิธีอื่นเมื่อพิจารณาในเรื่องความถูกต้องแม่นยำในทุกระยะการคำนวณภายใต้ความกว้างช่วงคำนวณ (Step Size) เดียวกัน [3] ซึ่งมี

ประสิทธิภาพและมีความสะดวกในการประยุกต์ใช้ โดยเฉพาะมีความง่ายในการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เพื่อคำนวณหาผลเฉลย วิธีการนี้ได้ถูกปรับปรุงขึ้นมาในหลากหลายแบบ

สมการเร่งและคุดตาอันดับ 1 (RK1) มีลักษณะคล้ายกับสมการในระเบียบวิธีของออยเลอร์ โดยในวิธีนี้ ค่าของผลเฉลยของเวลาถัดไปจะขึ้นอยู่กับผลรวมของค่าของผลเฉลย ณ ปัจจุบันกับความชันของช่วงเวลาปัจจุบัน (k_1) ทำให้ผลเฉลยของวิธีนี้ไม่เสถียรและไม่ถูกต้องแม่นยำเท่าที่ควร [4] RK2 เป็นสมการที่ปรับปรุงขึ้นมาจากวิธีของออยเลอร์โดยได้เพิ่มพจน์ของความชัน (k_2) ณ ตำแหน่งตรงกลางของผลเฉลยในปัจจุบันกับ k_1 เข้าไปด้วย ทำให้ผลเฉลยมีความถูกต้องแม่นยำดีขึ้นจากเดิม RK3 [5] ได้เพิ่มพจน์ของความชัน (k_3) เพื่อเพิ่มความถูกต้องแม่นยำ ส่วน RK4 นั้นจะถูกนำมาใช้ค่อนข้างมากในทางปฏิบัติ (de facto) สามารถคำนวณหาผลเฉลยโดยคอมพิวเตอร์ด้วยการใช้โปรแกรมภาษาต่าง ๆ ซึ่งมีไลบรารีที่นักพัฒนาทั่วโลกได้ทำไว้มากมาย สามารถเข้าถึงได้จากสื่ออินเทอร์เน็ตทั่วไป ทั้งยังสามารถนำเอาหลักการอื่นมารวมเพื่อประยุกต์ใช้ต่อได้อีกหลากหลายแนวทาง [3] เช่น ประยุกต์เพิ่มเติมโดยการนำเอา Unscented Kalman Filter มาใช้ร่วมกับ RK4 ในการประมาณหามุม Pitch และ Yaw ของกระสุนขณะเคลื่อนที่ นอกจากนี้แล้ว ยังมีสมการเร่งและคุดตาในอันดับที่สูงขึ้นไปอีก เช่น RK5 [6], RK8 [7, 8] และ RK10 [9]

บทความนี้จะนำเสนอวิธีการการแก้ปัญหาเชิงตัวเลขของแนววิถีกระสุน โดยจะเริ่มจากนำเสนอสมการการเคลื่อนที่ของแนววิถีกระสุนโดยอ้างอิงจากแบบจำลองของ Modified Point Mass Trajectory Model ที่อยู่ในข้อตกลงมาตรฐาน STANAG 4355 ขององค์การสนธิสัญญาแอตแลนติกเหนือ แล้วหาผลเฉลยของสมการนี้ด้วยวิธีการของเร่งและคุดตาอันดับที่ 4 จากนั้นได้ทำการแสดงแนววิถีกระสุนเพื่อให้เห็นถึงแนวโน้มการเปลี่ยนแปลงเมื่อค่าตัวแปรในสมการมีค่าไม่เท่ากัน

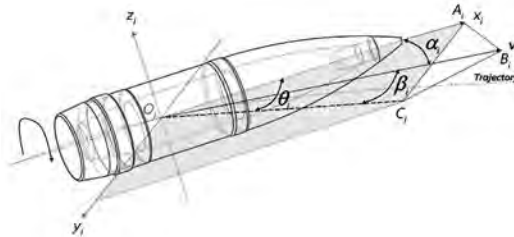
โดยในบทความนี้จะนำเสนอเฉพาะค่าความเร็วต้นของกระสุนที่ปลายกระบอกปืนจำนวน 5 ค่า

2. สมการการเคลื่อนที่ของแนววิถีกระสุน

เมื่อกระสุนเคลื่อนที่ออกจากปากกระบอกปืนผ่านตัวกลาง (ในบทความนี้จะพิจารณาเฉพาะตัวกลางที่เป็นอากาศ) ด้วยความเร็ว V ณ เวลาใดๆ แนววิถีกระสุนจะเบี่ยงเบนไปจากที่ออกแบบไว้เป็นมุม α เนื่องจากแรงและโมเมนต์ต่าง ๆ ที่กระทำต่อกระสุน โดยจะประกอบด้วย แรงโน้มถ่วงของโลก (Gravity Force: F_G) กระทำในทิศทางพุ่งเข้าสู่จุดศูนย์กลางของโลก โดยขนาดของแรงนี้จะขึ้นอยู่กับมวลและตำแหน่งของกระสุน ณ เวลานั้น ๆ แรงต้านอากาศ (Drag Force: F_D) เกิดจากการเคลื่อนที่ของกระสุนผ่านอากาศที่มีความหนาแน่นและมีทิศทางตรงกันข้ามกับเวกเตอร์ความเร็ว V ซึ่งโดยทั่วไปแล้วจะกระทำต่อกระสุนในสองรูปแบบหลักคือ แรงต้านเนื่องจากความดัน (Pressure Drag) แรงต้านจากผิว (Skin Friction Drag) โดยขนาดของแรงต้านนี้จะแปรผันกับ ความหนาแน่นของอากาศ (ρ) ความเร็วสัมพัทธ์ระหว่างอากาศกับกระสุน (V) พื้นที่ผิวที่ถูกกระทำ (S) และค่าสัมประสิทธิ์แรงต้าน (Drag coefficient, C_D), แรงยกตัว (Lift Force: F_L) กระทำในทิศทางตั้งฉากกับ V , แรงแมกนัส (Magnus Force: F_M) เกิดจากการที่กระสุนเคลื่อนที่แบบหมุนรอบแกนด้วยความเร็วเชิงมุมของกระสุน (Angular Velocity: ω) ผ่านกระแสอากาศที่มีความเร็วและทิศทางตั้งฉากกับ V เป็นผลทำให้ตำแหน่งด้านบนและด้านล่างของกระสุนมีความเร็วสัมพัทธ์ไม่เท่ากัน เกิดเป็นแรงแมกนัสทำให้กระสุนเคลื่อนที่เบี่ยงเบนไปจากทิศทางเดิม, แรงหน่วงในทิศทางพิทช์ (Pitch Damping Force: F_P) เป็นแรงที่เกิดจากความหนืดของอากาศ ทำให้กระสุนเคลื่อนที่ช้าลงในทิศทางพิทช์ [10] นอกจากนั้นแล้วยังมีแรงที่เกิดจากผลกระทบของคอรียอลิส (Coriolis Force: F_C) และโมเมนต์แบบต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นขณะกระสุนเคลื่อนที่อยู่ในอากาศ โดยสามารถสรุปได้ดังตารางที่ 1

แรงและโมเมนต์ที่เกิดขึ้นกับกระสุนดังกล่าวข้างต้นนั้น สามารถนำมาประยุกต์ใช้เพื่อสร้างแบบจำลองการเคลื่อนที่ของแนววิถีกระสุน โดยสามารถทำหลายวิธี เช่น ประยุกต์ใช้แบบจำลอง Rigid Body Trajectory Model (RBTM) [11], Point-Mass Trajectory Model

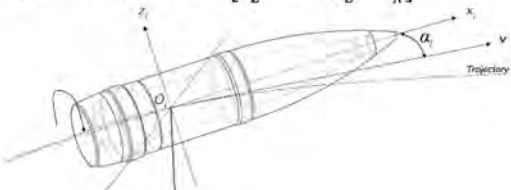
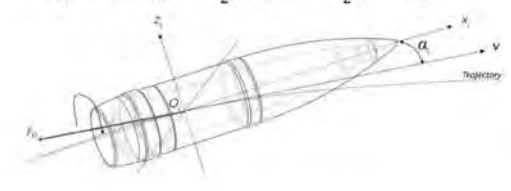
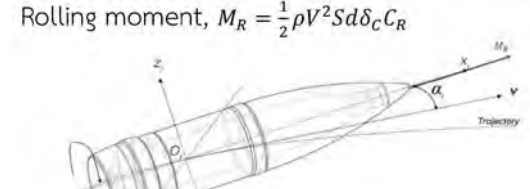
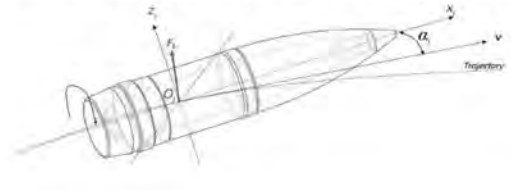
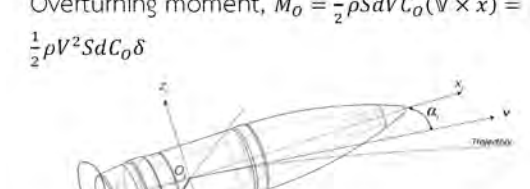
(PMTM) [11-13] หรือ Modified Point Mass Trajectory Model (MPMTM) [14, 15] ซึ่งในบทความนี้จะใช้แบบจำลอง MPMTM เนื่องจากมีองศาอิสระน้อยกว่าเมื่อเทียบกับแบบจำลอง PMTM โดยมีรูปแบบของสมการดังสมการที่ (1)



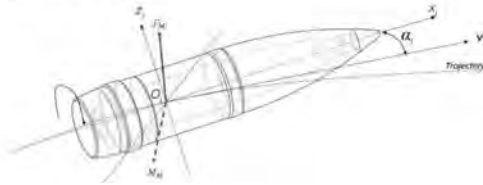
รูปที่ 1 แผนภาพของกระสุนเมื่อเคลื่อนที่ในตัวกลาง ณ เวลาใด ๆ

$$m\ddot{x} = \vec{F}_C + \vec{F}_G + \vec{F}_D + \vec{F}_L + \vec{F}_M \quad (1)$$

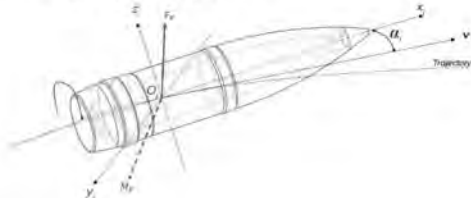
ตารางที่ 1 แรงและโมเมนต์ที่เกิดขึ้นระหว่างกระสุนเคลื่อนที่ในอากาศ

แรง	โมเมนต์
Gravity force, $F_G = -mg_0(lat, AZ) \begin{bmatrix} \frac{x}{R_Z} & 1 - \frac{2y}{R_Z} & \frac{z}{R_X} \end{bmatrix}^T$ 	Spin-damping moment, $M_S = \frac{1}{2} \rho V^2 S d \left(\frac{pd}{V} \right) C_S$ 
Drag force, $F_D = -\frac{1}{2} \rho S C_D V V = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D$ 	Rolling moment, $M_R = \frac{1}{2} \rho V^2 S d \delta C_R$ 
Lift force, $F_L = \frac{1}{2} \rho S C_L [V \times (x \times V)] = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_L \delta$ 	Overturning moment, $M_O = \frac{1}{2} \rho S d V C_O (V \times x) = \frac{1}{2} \rho V^2 S d C_O \delta$ 

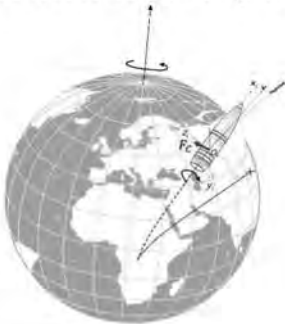
$$\text{Magnus force, } F_M = \frac{1}{2} \rho S V \left(\frac{\omega d}{V} \right) C_M = \frac{1}{2} \rho V^2 S \left(\frac{\omega d}{V} \right) C_M \delta$$



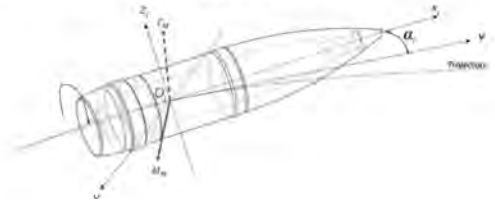
$$\text{Pitch damping force, } F_p = \frac{1}{2} \rho S V d (C_{pFq} + C_{pFa}) \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \rho V^2 S \left(\frac{\omega d}{V} \right) C_M \delta$$



$$\text{Coriolis force, } F_c = 2m(\vec{\omega} \times \vec{x})$$

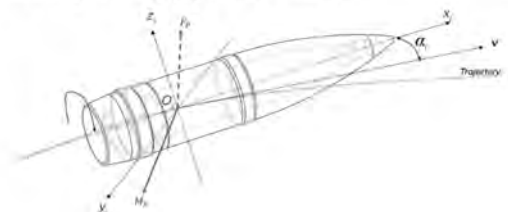


$$\text{Magnus moment, } M_M = \frac{1}{2} \rho S V S d \left(\frac{\omega d}{V} \right) C_M [x \times (V \times x)] = \frac{1}{2} \rho V^2 S d \left(\frac{\omega d}{V} \right) C_M \delta$$



$$\text{Pitch damping moment,}$$

$$M_p = \frac{1}{2} \rho V^2 S d \left(\frac{q_{td}}{V} \right) [C_{pMq} + C_{pMa}]$$



$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \Omega \cos(\text{lat}) \cos(\text{az}) \\ \Omega \sin(\text{lat}) \\ -\Omega \cos(\text{lat}) \sin(\text{az}) \end{pmatrix}$$

โดยที่ $\vec{F}_C, \vec{F}_G, \vec{F}_D, \vec{F}_L$ และ $\vec{F}_M$ คือ แรงเสียดทานอันเนื่องมาจากผลกระทบของคอริโอลิส แรงโน้มถ่วงของโลก แรงดูดอันเนื่องมาจากแรงต้านอากาศ แรงยกตัว และแรงแมกนัส ตามลำดับ ซึ่งรูปแบบสมการของแรงแต่ละชนิดสามารถแสดงได้ดังตารางที่ 1 โดยในบทความนี้จะนำเสนอสมการข้างต้นมาประยุกต์ใช้ในการหาผลเฉลยของวิถีกระสุนด้วยวิธีรุงเง - คุตตา

3. ระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตา

ระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตา (Runge-Kutta Method: RK) เป็นระเบียบวิธีที่นิยมใช้กันมากที่สุดใน การแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ODE) รูปแบบสมการ โดยทั่วไปสามารถแสดงได้ดังสมการที่ 2

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h \quad (2)$$

โดยที่ $\phi(x_i, y_i, h)$ คือฟังก์ชันส่วนเพิ่ม สามารถเขียนกระจายได้เป็น

$$\phi(x_i, y_i, h) = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n \quad (3)$$

a_i คือ ค่าคงที่ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$), n คือ อันดับของ R_K , k_i คือ ฟังก์ชันของระเบียบวิธี R_K โดยสามารถเขียนอยู่ในรูปดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \\ k_3 &= f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \\ &\dots \\ k_n &= f(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \dots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h) \end{aligned} \quad (4)$$

บทความนี้จะใช้ระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับที่สี่ (RK4) มาประยุกต์ใช้การแก้สมการ เนื่องจากเป็นระเบียบวิธีที่ให้คำตอบได้แม่นยำมากที่สุด จากสมการที่ (2) – (4) เมื่อกำหนดให้ $n=4$ จะได้สมการ RK4 สำหรับ

ใช้คำนวณหาแนววิถีกระสุนดังสมการที่ (5) ซึ่งสามารถนำไปใช้ในการเขียนในโปรแกรมคอมพิวเตอร์ภาษาต่าง ๆ เช่น C++, Python, Lua เพื่อหาผลเฉลยต่อไป

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \left[\frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \right] h \\ k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right) \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right) \\ k_4 &= f(x_i + h, y_i + h k_3) \end{aligned} \quad (5)$$

4. วิธีการ

ในการจำลองการเคลื่อนที่ของแนววิถีกระสุน จำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องทราบคุณสมบัติของกระสุนที่ใช้ตลอดจนตัวแปรต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องทั้งหมดโดยละเอียด เนื่องจากค่าต่าง ๆ ที่จะนำมาใช้นั้นจะต้องอาศัยการวิจัยศึกษา และทดลองของกระสุนชนิดนั้น ๆ มาเป็นอย่างดี ซึ่งจำเป็นจะต้องใช้เวลาเป็นอย่างมากกว่าจะได้ค่าตัวแปรต่าง ๆ และความสัมพันธ์ของแต่ละตัวแปรโดยละเอียด

เพื่อลดความซับซ้อนและเพื่อแสดงให้เห็นถึงตัวอย่างการคำนวณแนววิถีกระสุนด้วยวิธีการเชิงตัวเลข บทความนี้จึงได้ทำการกำหนดให้ตัวแปรต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องโดยการประยุกต์และอ้างอิงจากงานวิจัยของ [16, 17] โดยมีค่าดังตารางที่ 2

จากสมการที่ (1) และตารางที่ (1) – (2) สามารถสร้างสมการการเคลื่อนที่ของแนววิถีกระสุนตามพิกัดแกนต่าง ๆ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\frac{\pi d^2 \rho}{8} C_L v v_1 + \frac{\pi d^2 \rho}{8} C_L v^2 \alpha_{\phi_1} + \frac{\pi d^3 \rho}{8} C_M (\alpha_{\phi_3} v_3 - \alpha_{\phi_2} v_2) \\ &\quad - 2\Omega \left[\sin(lat) \frac{dz}{dt} + \cos(lat) \sin(az) \frac{dy}{dt} \right] - g_0 \frac{x}{R} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\pi d^2 \rho}{8} C_{D_h} v v_2 + \frac{\pi d^2 \rho}{8} C_{L_v} v^2 \alpha_{c_2} + \frac{\pi d^3 \rho}{8} C_{M_{\alpha}} (\alpha_{c_1} v_1 - \alpha_{c_1} v_3) - 2\Omega \left[\cos(lat) \sin(az) \frac{dx}{dt} + \cos(lat) \cos(az) \frac{dz}{dt} \right] - g_0 \left(1 - \frac{2y}{R} \right) \quad (7)$$

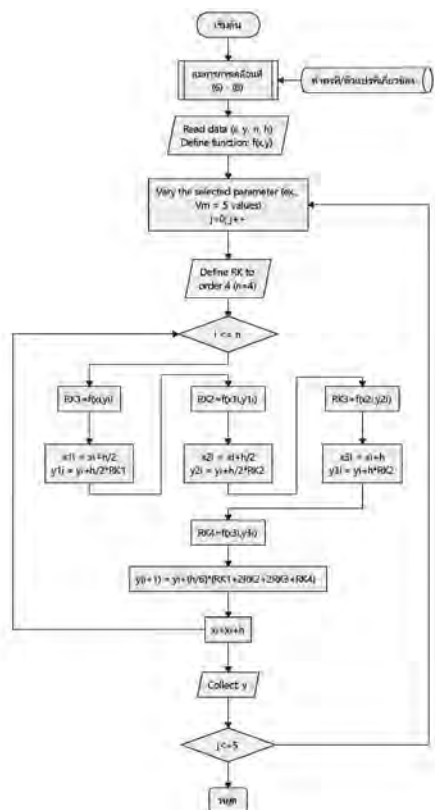
$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\pi d^2 \rho}{8} C_{D_v} v v_3 + \frac{\pi d^2 \rho}{8} C_{L_v} v^2 \alpha_{c_3} + \frac{\pi d^3 \rho}{8} C_{M_{\alpha}} (\alpha_{c_1} v_2 - \alpha_{c_2} v_1) - 2\Omega \left[\cos(lat) \cos(az) \frac{dy}{dt} - \sin(az) \frac{dx}{dt} \right] - g \frac{z}{R} \quad (8)$$

สมการที่ (6) – (8) จะสามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบอย่างง่ายและสามารถนำไปใช้หาผลเฉลยด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในรูปแบบของสมการที่ (5) ซึ่งสามารถดูวิธีการแปลงรูปสมการโดยละเอียดได้ใน [18] โดยบทความนี้ได้ทำการเขียนโปรแกรมระเบียบวิธีเชิงตัวเลขด้วยภาษา C++ และนำเอาผลเฉลยมาแสดงผลแนววิถีกระสุนด้วย Matlab ทั้งนี้ได้ทำการทดลองปรับตัวแปรความเร็วของกระสุนเมื่อออกจากปากกระบอกปืนจำนวน 5 ค่าที่แตกต่างกัน เพื่อให้เห็นความแตกต่างของแนววิถีกระสุน โดยกระบวนการทั้งหมดสามารถสรุปได้ดังแผนภาพในรูปที่ 2

5. ผลการจำลอง

ในบทความนี้ได้ทดลองเปลี่ยนค่าความเร็วของกระสุนขณะออกจากปากกระบอกปืนจำนวน 5 ค่า คือ 920, 980, 1,070, 1,540, และ 1,800 เมตรต่อวินาที และได้กำหนดให้มุมทางสูงและมุมทางทิศของกระบอกปืนเริ่มต้นมีค่าเท่ากับ 45 และ 60 องศาตามลำดับ ผลเฉลยของการจำลองแนววิถีกระสุนสามารถแสดงได้ดังตารางที่ 3 และแสดงแนววิถีกระสุนได้ในรูปที่ 3 - 4 ซึ่งแสดงให้เห็นว่าวิถีกระสุนที่ความเร็วต้นแต่ละค่าจะเบี่ยงเบนไปจากแนวปากกระบอกปืนเดิม ณ เวลาที่แตกต่างกัน โดยกระสุนที่มีความเร็วปากกระบอกปืนต่ำกว่า จะเบี่ยงเบนไปจากแนวเดิมได้เร็วกว่ากระสุนที่มีความเร็วปากกระบอกปืนสูงกว่า และจะส่งผลให้ระยะการเคลื่อนที่ของกระสุนต่ำกว่าในทุก ๆ พิกัดแกนอ้างอิง นอกจากนั้นแล้วยังพบว่าตำแหน่งของกระสุน ณ เวลาใด ๆ จะมีค่าที่แตกต่างกัน โดยจะเห็นได้ชัดเมื่อเวลาเพิ่มขึ้น ในการจำลองวิธีนี้หากทราบค่าตัวแปรต่าง ๆ ที่ละเอียดยิ่งขึ้น หรือทราบ

ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่าง ๆ ณ เวลาใด ๆ ก็จะสามารถปรับเปลี่ยนค่าเพิ่มเติมเพื่อหาผลเฉลยที่แม่นยำยิ่งขึ้นได้ตลอดเวลา ซึ่งจะส่งผลให้ผลเฉลยหรือแนววิถีกระสุนที่ได้มีความแม่นยำมากขึ้น ซึ่งในจุดนี้บังคับให้เห็นว่าการออกแบบระบบปืนต่อสู้อากาศยานหรือระบบจรวดต่อสู้อากาศยานแบบต่าง ๆ นั้น จำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องมีการคำนวณแนววิถีกระสุนนี้โดยละเอียดและครอบคลุมทุกด้านเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพการยิงให้ดียิ่งขึ้น



รูปที่ 2 แผนผังการจำลองแนววิถีกระสุนด้วย RK4

6. สรุปผล

บทความนี้นำเสนอวิธีประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขของรุ่ง-ศุคตามาแก้สมการการเคลื่อนที่แบบไม่เป็นเชิงเส้นของกระสุน วิธีนี้มีความสะดวกรวดเร็ว ให้ผลเฉลยที่ค่อนข้างแม่นยำในทางทฤษฎี สามารถประยุกต์ใช้ในดิจิทัลคอมพิวเตอร์ได้เป็นอย่างดี นอกจากนั้นแล้วการแก้สมการการเคลื่อนที่ที่ไม่เป็นเชิงเส้นของแนววิถีกระสุนด้วยระเบียบวิธีของรุ่ง-ศุคตามนี้ ยังมีจุดที่น่าสนใจอีกหลายประการ เช่น สามารถนำไปประยุกต์ใส่ในไอซีชิป เช่น ไมโครคอนโทรลเลอร์ หรือ FPGA ต่าง ๆ เพื่อพัฒนาระบบสมองกลฝังตัวเฉพาะงานต่อไปได้ หรือสามารถทดลองปรับลดหรือเพิ่มอันดับของสมการเพื่อเปรียบเทียบหาอันดับที่ดีที่สุดได้ง่ายกว่าวิธีการอื่น ๆ

อย่างไรก็ตาม เนื่องจากในบทความนี้ยังคงมีประเด็นที่ควรเพิ่มเติมอยู่หลายประการ อาทิเช่น

1. การปรับเปลี่ยนค่าตัวแปรต่าง ๆ แบบไดนามิกส์ ณ เวลาใด ๆ

2. ความสัมพันธ์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นของตัวแปรต่าง ๆ ณ เวลาใด ๆ

3. ขณะทำการศึกษา ทีมผู้วิจัยยังขาดข้อมูล Firing table ของกระสุนจริง โดย Firing table จะบอกรายละเอียดต่าง ๆ รวมทั้งตัวแปรทั้งหมดที่เกี่ยวข้องกับกระสุนที่ผลิตในล็อตนั้นๆ ซึ่งสามารถช่วยให้ผู้พัฒนาออกแบบระบบการยิง รวมไปถึงผู้ยิงสามารถปรับค่าตัวแปรต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการยิง เพื่อให้การยิงนั้นมีประสิทธิภาพและความแม่นยำมากยิ่งขึ้น [19] ซึ่งหากมีข้อมูลต่าง ๆ เหล่านี้ ก็จะสามารถใช้เป็นตัวช่วยในการเปรียบเทียบความถูกต้องแม่นยำของผลเฉลยในงานนี้ได้ดียิ่งขึ้น

ทั้งนี้ ทีมผู้วิจัยกำลังอยู่ระหว่างการศึกษาค้นคว้าหาข้อมูล พัฒนาวิธีการ และหาวิธีการทดสอบเพิ่มเติม โดยมีเป้าหมายเพื่อให้ได้ผลงานที่มีประสิทธิภาพที่ดียิ่งขึ้น และเพื่อเป็นส่วนหนึ่งในการช่วยเพิ่มขีดความสามารถในการพัฒนาอุตสาหกรรมป้องกันประเทศของไทยในอนาคตอันใกล้ต่อไป

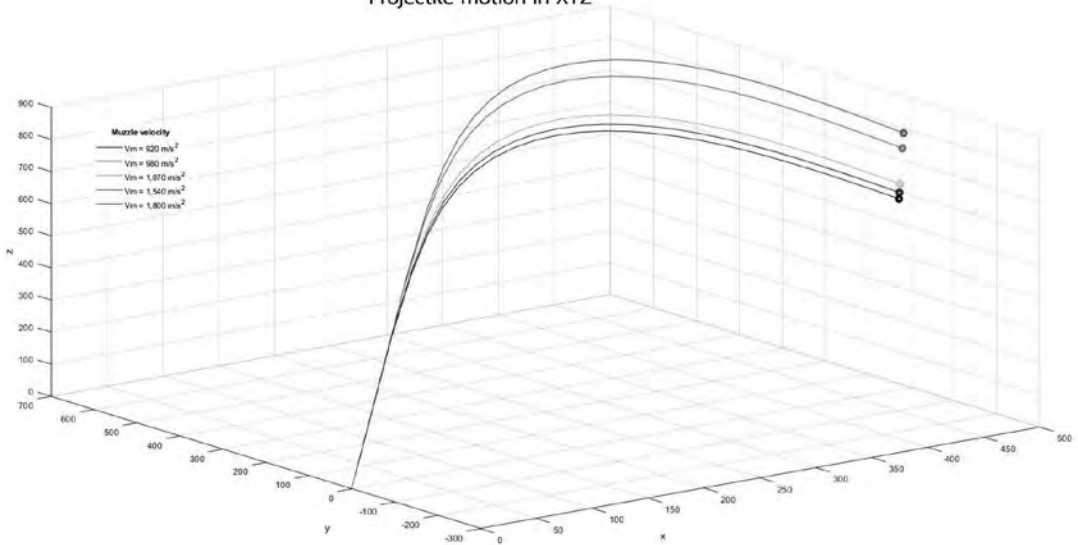
ตารางที่ 2 ตัวแปรที่ใช้ในการจำลองการเคลื่อนที่ของแนววิถีกระสุน

ตัวแปร	ความหมาย	ค่าที่เลือกใช้	หน่วย	ตัวแปร	ความหมาย	ค่าที่เลือกใช้	หน่วย
C_d	ค่าสัมประสิทธิ์ของแรงฉุดอันเนื่องมาจากแรงต้านอากาศ	0.29		R	ขนาดรัศมีของโลก	6,371	m
C_L	ค่าสัมประสิทธิ์ของค่าแรงลอยตัวอันเนื่องมาจากแรงต้านอากาศ	1.490		q_a	Yaw drag factor	1.2	
C_M	ค่าสัมประสิทธิ์ของค่าแรงแมกนัส	-0.665		q_m	Magnus force factor	1.0	
C_{sp}	Spin coefficient factor	-0.01150		ρ	ความหนาแน่นของอากาศ	1.2	kg/m^3
Ω	ความเร็วในการหมุนรอบตัวเองของโลก	7.26×10^{-5}	rad/s	p	spin angular velocity	1654.3	rad/s
lat	มุมทางสูงเริ่มต้น	0.785	rad	m	มวลของลูกกระสุน	47.5	kg
az	มุมทางทิศเริ่มต้น	1.047	rad	d	เส้นผ่านศูนย์กลางของลูกกระสุน	0.155	m

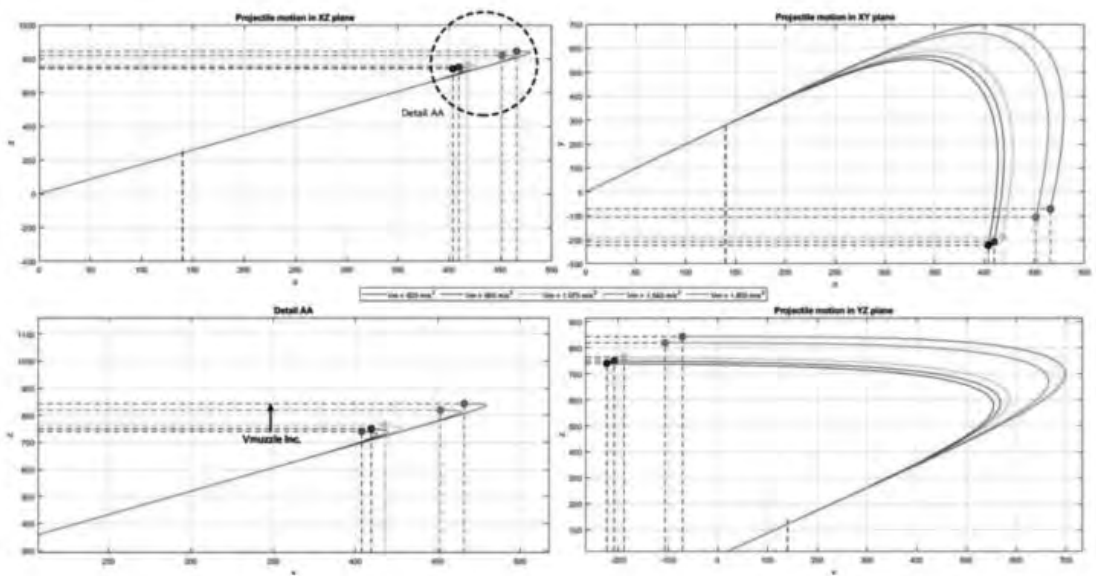
ตารางที่ 3 แนววิถีกระสุนที่ความเร็วปากกระบอกปืนต่าง ๆ

V _{muzzle}	920			980			1070			1540			1800		
	x(k)	y(k)	z(k)	x(k)	y(k)	z(k)	x(k)	y(k)	z(k)	x(k)	y(k)	z(k)	x(k)	y(k)	z(k)
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	149.983	296.917	259.800	155.133	307.259	268.721	162.424	321.897	281.349	194.084	385.437	336.189	208.281	413.917	360.780
2	210.795	410.495	365.132	216.650	422.331	375.274	224.876	438.948	389.519	259.863	509.545	450.114	275.230	540.514	476.728
3	249.951	476.033	432.919	256.079	488.517	443.531	264.659	505.981	458.385	300.863	579.514	521.072	316.641	611.488	548.390
4	279.140	516.867	483.409	285.402	529.740	494.247	294.157	547.717	509.401	330.943	623.000	573.070	346.914	655.576	600.711
5	302.578	541.313	523.917	308.915	554.472	534.878	317.765	572.821	550.187	354.855	649.377	614.347	370.919	682.388	642.134
6	322.244	553.187	557.891	328.623	566.581	568.916	337.525	585.234	584.304	374.769	662.832	648.681	390.870	696.194	676.512
7	339.174	554.476	587.152	345.575	568.074	598.206	354.504	586.994	613.625	391.808	665.502	678.045	407.914	699.171	705.858
8	353.913	546.352	612.682	360.325	560.134	623.741	369.264	579.293	639.161	406.572	658.618	703.510	422.662	692.563	731.262
9	366.727	529.706	634.983	373.142	543.652	646.032	382.083	563.023	661.431	419.355	643.071	725.628	435.413	677.261	753.288
10	377.737	505.434	654.309	384.149	519.522	665.335	393.084	539.074	680.697	430.289	619.741	744.675	446.304	654.138	772.216
11	387.016	474.540	670.830	393.020	488.740	681.822	402.340	508.442	697.131	439.451	589.616	760.829	455.411	624.174	788.225
12	394.646	438.085	684.732	401.038	452.376	695.677	409.934	472.198	710.914	446.923	553.760	774.274	462.817	588.442	801.503
13	400.740	397.124	696.241	407.113	411.483	707.129	415.980	431.410	722.283	452.818	513.243	785.246	468.633	548.015	812.283
14	405.035	352.616	705.624	411.783	367.021	716.046	420.619	387.033	731.509	457.274	469.048	794.015	473.002	503.882	820.840
15	408.883	305.379	713.169	415.202	319.825	723.914	423.994	339.872	738.866	460.448	422.030	800.877	476.078	456.900	827.471
16	411.237	256.086	719.162	417.524	270.559	729.824	426.274	290.650	744.665	462.501	372.889	806.129	478.026	407.786	832.480
17	412.653	205.292	723.885	418.900	219.772	734.449	427.597	239.891	749.160	463.586	322.181	810.058	478.999	357.081	836.149
18	413.262	153.386	727.580	419.472	167.879	738.051	428.110	187.999	752.621	463.848	270.330	812.924	479.147	305.240	838.750
19	413.196	100.677	730.483	419.363	115.182	740.850	427.939	135.299	755.272	463.415	217.654	814.957	478.597	252.566	840.515
20	412.558	47.401	732.781	418.680	61.906	743.041	427.193	82.023	757.312	462.397	164.390	816.361	477.459	199.303	841.642
21	411.441	-6.290	734.645	417.517	8.222	744.794	425.965	28.334	758.910	460.892	110.709	817.310	475.832	145.622	842.307
22	409.926	-60.264	736.216	415.956	-45.752	746.255	424.337	-25.644	760.211	458.983	56.735	817.951	473.799	91.652	842.663
23	408.082	-114.440	737.622	414.064	-99.931	747.544	422.377	-79.826	761.339	456.739	2.556	818.411	471.430	37.474	842.833
24	405.966	-168.760	738.962	411.898	-154.252	748.767	420.143	-134.149	762.399	454.219	-51.767	818.795	468.786	-16.846	842.926
25	403.625	-223.179	740.323	409.508	-208.673	750.010	417.684	-188.571	763.476	451.473	-106.188	819.191	465.915	-71.265	843.030

Projectile motion in XYZ



รูปที่ 3 แนววิถีกระสุนบนปริภูมิ 3 มิติ



รูปที่ 4 แนววิถีกระสุนบนระนาบต่างๆ

7. เอกสารอ้างอิง

- [1] Cumin, J., B. Grizelj, and R. Scitovski, Numerical solving of ballistic flight equations for big bore air rifle. Tehnicki Vjesnik, 2009. 16: p. 41-46.
- [2] Klimi, G., Improved Euler's Method Applied in Exterior Ballistics. 2016.
- [3] An, L., et al., A Novel Method for Estimating Pitch and Yaw of Rotating Projectiles Based on Dynamic Constraints. Sensors (Basel, Switzerland), 2019. 19(23): p. 5096.
- [4] Anidu, A., et al., Dynamic Computation of Runge Kutta Fourth Order Algorithm for First and Second Order Ordinary Differential Equation Using Java. International Journal of Computer Science Issues, 2015. 12.
- [5] Thomsen, P.G., A Generalized Runge-Kutta Method of order three. 2002.
- [6] Rabiei, F., Fifth-Order Improved Runge-Kutta Method With Reduced Number of Function Evaluations. Australian Journal of Basic and Applied Sciences, 2012. 6: p. 97-105.
- [7] Séka, H. and K. Assui, Order of the Runge-Kutta method and evolution of the stability region. Ural Mathematical Journal, 2019. 5: p. 64.
- [8] Seka, H. and R. Assui Kouassi, A New Eighth Order Runge-Kutta Family Method. Journal of Mathematics Research, 2019. 11(2): p. 190-199.
- [9] Feagin, T. A Tenth-Order Runge-Kutta Method with Error Estimate. 2007.
- [10] Carlucci, D.E. and S.S. Jacobson, Ballistics: Theory and Design of Guns and Ammunition. 2 ed. 2013, Florida, USA: CRC Press.
- [11] McCoy, R.L., Modern Exterior Ballistics. The Launch and Flight Dynamics of Symmetric Projectiles. 1999, Atglen: Schiffer Publishing.
- [12] Baranowski, L., Equations of motion of a spin-stabilized projectile for flight stability testing. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2013. 51: p. 235-246.
- [13] Baranowski, L., Effect of the mathematical model and integration step on the accuracy of the results of computation of artillery projectile flight parameters. Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences, 2013. 61: p. 475-484.
- [14] Baranowski, L., Feasibility analysis of the modified point mass trajectory model for the need of ground artillery fire control systems. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2013. 51: p. 511-522.
- [15] Lieske, R.F. and M.L. Reiter. Equations of motion for a modified point mass trajectory. 1966.
- [16] Balon, R. and J. Komenda, Analysis of the 155 mm ERFB/BB projectile trajectory. 2006. 1: p. 91-114.
- [17] Skande, M., Numerical Solution to a Nonlinear External Ballistics Model for a Direct Fire Control System, in KTH Industrial Engineering and Management. 2014, KTH: Stockholm, Sweden.
- [18] Hussain, K., F. Ismail, and N. Senu, Runge-Kutta Type Methods for Directly Solving Special Fourth-Order Ordinary Differential Equations. Mathematical Problems in Engineering, 2015.
- [19] Elizabeth R. D., The production of firing tables for cannon artillery. 1967.